Jurnal Barekeng
Vol. 6 No. 1 Hal. 9 – 12 (2012)

Barekeng
jurnal ilmu matematika dan terapan
© Jurusan Matematika FMIPA Unpatti 2012

DISTRIBUSI ANUITAS HIDUP KONTINU

Distribution of Continuous Life Annuities

THOMAS PENTURY
Staf Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon
e-mail: tpentury@gmail.com

ABSTRAK

Anuitas adalah suatu pembayaran dalam jumlah tertentu yang dilakukan dalam periode waktu tertentu secara berkelanjutan. Anuitas terdiri atas anuitas pasti dan anuitas hidup. Pada prinsipnya kedua anuitas tersebut sama yaitu menggunakan tingkat bunga (*interest rate*) untuk melakukan pembayaran. Anuitas hidup menggunakan faktor kelangsungan hidup seseorang (*survival*). Faktor kelangsungan hidup yang dimaksud merupakan peluang hidup seseorang dimulai dari kelahiran sampai kematian. Oleh karena itu, faktor kelangsungan hidup merupakan sebuah distribusi peluang yang dikenal sebagai distribusi waktu hidup yang akan datang (*future lifetime distribution*). Dengan demikian, anuitas hidup membentuk sebuah distribusi peluang yang disebut sebagai distribusi anuitas hidup kontinu.

Kata kunci: Anuitas, anuitas hidup, anuitas pasti, tingkat bunga, kelangsungan hidup, distribusi waktu hidup yang akan datang, distribusi anuitas hidup kontinu

PENDAHULUAN

Aktuaria merupakan bagian dari ilmu matematika tentang asuransi. Aktuaria berkembang pada akhir abad ke-17 di dataran Eropa. Perkembangan aktuaria seiring dengan meningkatnya permintaan untuk jangka panjang jaminan asuransi seperti asuransi jiwa dan tunjangan hari tua (dana pensiun). Perkembangan ini tidak lepas dari pendefinisian premi yang dibayar dan pendefinisian manfaat yang akan diperoleh di waktu yang akan datang (masa depan). Untuk pendefinisian premi ada unsur yang paling penting dalam membentuk premi yaitu anuitas hidup.

Pada umumnya anuitas adalah suatu pembayaran dalam jumlah tertentu yang dilakukan setiap selang waktu dan jangka waktu tertentu secara berkelanjutan. Anuitas ini sering disebut dengan anuitas pasti karena tidak bergantung oleh faktor-faktor yang lain, selain tingkat suku bunga dan jangka waktu pembayaran. Anuitas ini sering ditemui dalam sistem pembayaran di perbankan dan lembaga keuangan lainnya, seperti pengembalian kredit oleh pengambil kredit kepada bank atau institusi lainnya, pembayaran bunga bulanan oleh bank, dan pembayaran-pembayaran lainnya.

Berbeda dengan anuitas pasti, pembayaran anuitas dalam aktuaria sering disebut sebagai anuitas hidup. Anuitas hidup merupakan suatu pembayaran jumlah tertentu yang dilakukan dalam selang waktu dan jangka waktu tertentu yang disertai dengan faktor kelangsungan hidup (*survival*). Dengan kata lain, anuitas hidup merupakan anuitas pasti yang disertai dengan faktor usia hidup. Faktor kelangsungan hidup sangat diperhatikan dalam aktuaria, karena pembayaran dan manfaat yang diberikan dalam asuransi jiwa atau dana pensiun berkaitan dengan usia hidup seseorang (bergantung pada hidup atau meninggalnya seseorang).

Anuitas hidup dapat digambarkan sebagai pembayaran yang dilakukan oleh seseorang dengan usia hidup x, dinotasikan dengan (x) akan hidup sampai t tahun. Untuk (x) dapat hidup sampai t tahun merupakan sesuatu yang belum pasti, karena (x) kemungkinan dapat meninggal dalam jangka waktu *t* tahun. Untuk itu, faktor kelangsungan hidup yang dimaksud merupakan suatu kemungkinan hidup (peluang hidup). Secara matematis, faktor kelangsungan hidup tersebut dapat diberikan dalam sebuah fungsi peluang yang sering disebut sebagai fungsi *survival*.

TINJAUAN PUSTAKA

Terdapat dua jenis anuitas yaitu anuitas pasti dan anuitas hidup. Anuitas hidup analog dengan anuitas pasti hanya saja dalam anuitas hidup terdapat faktor *survival* dan berhubungan dengan endowmen murni.

Anuitas hidup merupakan rangkaian pembayaran yang terbentuk selama hidup dari seseorang yang berusia *x* tahun (Takashi Futami, 1993). Sehingga anuitas hidup dapat disajikan sebagai anuitas tertentu dengan term yang bergantung pada sisa hidup nasabah. Karena merupakan rangkaian pembayaran maka di dalamnya terdapat premi yang harus dibayarkan. Premi berkaitan erat dengan suku bunga.

Tingkat suku bunga merupakan kompensasi yang harus dibayarkan oleh pihak peminjam kepada pihak yang meminjamkan dana atau dalam hal asuransi tingkat suku bunga dibayarkan oleh pihak tertanggung kepada pihak penanggung.

Misalkan seseorang berusia *x* tahun dinotasikan dengan (x) sedangkan waktu hidup yang akan datang dari orang tersebut dinotasikan dengan $T(x)$ adalah dua faktor penting dalam anuitas hidup. Di dalamnya terdapat faktor *survival*.

Jika *Y* adalah anuitas hidup kontinu dimana $Y = \bar{a}_{\overline{T}|}$ maka fungsi distribusi dari *Y* bergantung pada distribusi dari *T* (Bowers et al, 1997). Distribusi dari anuitas hidup kontinu dapat digambarkan oleh bentuk *cumulative distribution function* (*cdf*) dan *probability density function* (*pdf*) – nya. Juga terdapat keterkaitan antara distribusi usia hidup seseorang sekarang dan usia hidup yang akan datang.

Berikut ini akan diberikan beberapa teori-teori dasar yang mendukung pembahasan.

Waktu Hingga Kematian (*Future Life Time*)

Jika *x* adalah bilangan bulat, variabel random $S = S(x)$ maka waktu hingga kematian adalah

$$T = K + S$$

dimana

K = *curtate – future – lifetime.*

S = variabel random yang menunjukkan bagian fraksional dari tahun hidup pada tahun kematian.

Misalkan seseorang berumur *x* memiliki waktu hidup $T(x)$, maka umur orang tersebut pada saat meninggal adalah $x + T(x)$. T merupakan variabel random, dengan fungsi distribusi G, dengan

$$G(t) = P(T \le t), t \ge 0$$

Merupakan probabilitas seorang yang berumur x akan meninggal pada saat t tahun. Fungsi $G(t)$ umumnya dinotasikan dengan ${}_t q_x$ sehingga ${}_t q_x = G(t)$.

Fungsi bertahan hidup $s(t)$ didefinisikan

$$s(t) = 1 - G(t) = P(T > t), t \ge 0$$

adalah probabilitas seorang yang berumur x akan bertahan hidup pada saat t tahun. Fungsi $s(t)$ umumnya dinotasikan dengan ${}_t p_x$ sehingga ${}_t p_x = s(t)$

Anuitas Pasti dengan Pembayaran Kontinu

Suatu anuitas dengan pembayaran sebesar 1 yang dilakukan secara kontinu setiap tahun dengan jangka waktu pembayaran selama *n* tahun disebut sebagai anuitas kontinu.

Nilai sekarang (*present value*) dari anuitas ini dinotasikan dengan $\bar{a}_{\overline{n}|}$ yang didefinisikan oleh formula seperti berikut ini.

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\delta s} ds = \frac{1 - e^{-\delta n}}{\delta}$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

DISTIBUSI DARI ANUITAS HIDUP KONTINU

Untuk anuitas seumur hidup (*whole life annuity*) yang disediakan sampai tertanggung meninggal, jika nilai sekarang (*present value*) dari pembayaran adalah $Y = \bar{a}_{\overline{T}|}$ untuk semua $T \ge 0$ dimana *T* adalah waktu yang akan datang dari (x). Fungsi distribusi dari *Y* dapat diperoleh sebagai berikut:

$$F_Y(y) = \Pr(Y \le y) = \Pr\left(\bar{a}_{\overline{T}|} \le y\right) = \Pr\left(1 - v^T \le \delta y\right)$$

$$= \Pr\left(v^T \ge 1 - \delta y\right) = \Pr\left(T \le \frac{-\log(1 - \delta y)}{\delta}\right)$$

$$= F_T\left(\frac{-\log(1 - \delta y)}{\delta}\right); \; 0 < y < \frac{1}{\delta}$$

Kemudian dapat diperoleh *pdf* dari *Y* yaitu

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} F_T\left(\frac{-\log(1 - \delta y)}{\delta}\right)$$

$$= \frac{f_T\left(\left[-\log(1 - \delta y)\right] / \delta\right)}{1 - \delta y}; \; 0 < y < \frac{1}{\delta}$$

Fungsi distribusi dari *Y* bergantung pada distribusi dari *T*.

Actuarial present value untuk anuitas seumur hidup kontinu dinotasikan oleh $\bar{a}_x$. Jika *pdf* mortalitas dari *T* adalah ${}_t p_x \, \mu(x + t)$ maka *actuarial present value* – nya adalah

$$\bar{a}_x = E[Y] = \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t}|} \, {}_t p_x \, \mu(x + t) dt$$

Dengan mengintegrasikan

$$f(t)=\bar{a}_{\overline{t|}}, dg(t)={}_t p_x\,\mu(x+t)dt, g(t)=-{}_t p_x,$$

dan

$$df(t)=v^t,$$

diperoleh

$$\bar{a}_x=\int_0^\infty v^t{}_t p_x\,dt=\int_0^\infty {}_t E_x dt$$

Persamaan tersebut dapat ditulis kembali sebagai berikut:

$$\bar{a}_x=\int_0^1 v^t{}_t p_x\,dt+\int_1^\infty v^t{}_t p_x\,dt$$

$$=\bar{a}_{x:\overline{1|}}+v p_x\int_0^\infty v^s{}_s p_{x+1}ds$$

$$=\bar{a}_{x:\overline{1|}}+v p_x\bar{a}_{x+1}$$

dimana $\mu(x)=\bar{a}_x, c(x)=\bar{a}_{x:\overline{1|}}$, dan $d(x)=v p_x$. Nilai awal untuk anuitas seumur hidup adalah $\bar{a}_\omega=0$.

ILUSTRASI NUMERIK

Pada bagian sebelumnya telah dibahas anuitas hidup secara teoritis. Bagian ini akan memberikan ilustrasi secara numerik dari perhitungan nilai anuitas pasti dan anuitas hidup kontinu menggunakan hukum Makeham. Ilustrasi numerik ini juga membandingkan antara nilai anuitas pasti dan anuitas hidup kontinu.

Anuitas Pasti

Nilai-nilai anuitas pasti yang diperoleh pada pagian ini merupakan penerapan langsung rumus anuitas pasti yang dibayarkan secara kontinu dengan cara mensubtitusi percepatan pembungaan sebagai berikut:

$$0{,}00; 0{,}01; 0{,}02; \ldots; 0{,}15$$

maka diperoleh nilai anuitas pasti seperti yang diperlihatkan pada Tabel 1.

Tabel 1. Nilai-nilai anuitas pasti

δ	$n=5$	$n=10$
0,00	5	10
0,01	4,8771	9,5163
0,02	4,7581	9,0635
0,03	4,6431	8,6394
0,04	4,5317	8,2420
0,05	4,4240	7,8694
0,06	4,3197	7,5198
0,07	4,2187	7,1916
0,08	4,1210	6,8834
0,09	4,0264	6,5937
0,10	3,9347	6,3212
0,11	3,8459	6,0648
0,12	3,7599	5,8234
0,13	3,6766	5,5959
0,14	3,5958	5,3815
0,15	3,5176	5,1791

Fungsi *Survival* Yang Didasarkan Atas Hukum Makeham

Nilai-nilai anuitas hidup yang diperoleh pada bagian ini menggunakan ${}_t p_x$ merupakan fungsi *survival* yang telah dibahas pada bagian sebelumnya. Fungsi survival tersebut didasarkan atas hukum Makeham dengan asumsi sebagai berikut:

$$A=0{,}0007,\ B=5\text{x}10^{-5},\ \text{dan}\ c=10^{0{,}04},\ m=\frac{b}{\log c}$$

(*Actuarial Mathematics* (Bowers et al.,1997)).

Berdasarkan asumsi Bowers untuk hukum Makeham maka diperoleh fungsi *survival* untuk usia 30 tahun, 45 tahun, dan 60 tahun sebagai berikut :

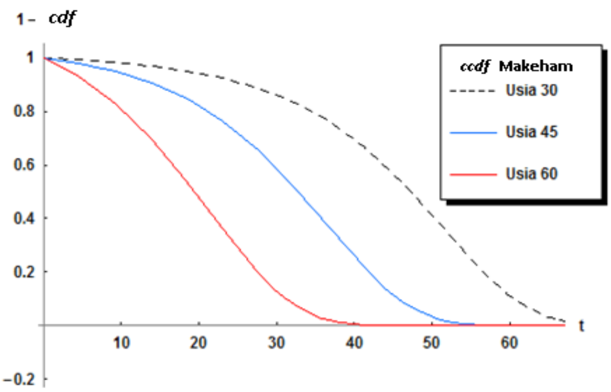
- Usia 30 tahun

  $1{,}00864e^{(-0{,}0086)\,1{,}09648^t-0{,}0007t}$
- Usia 45 tahun

  $1{,}03485e^{(-0{,}0343)1{,}09648^t-0{,}0007t}$
- Usia 60 tahun

  $1{,}1461e^{(-0{,}1364)1{,}09648^t-0{,}0007t}$

Secara visual bentuk fungsi *survival* dari ketiga usia di atas dapat diperlihatkan seperti pada Gambar 1.



Gambar 1. Grafik *ccdf* Makeham Usia 30, 45, 60 Tahun

Grafik yang diperlihatkan oleh Gambar 1 menunjukkan fungsi *survival* dari usia hidup 30 tahun, 45 tahun, dan 60 tahun. Pada Gambar tersebut terlihat jelas bahwa grafik usia hidup 30 tahun posisinya lebih ke kanan kemudian diikuti oleh usia 45 tahun dan 60 tahun. Hal ini menunjukkan bahwa peluang hidup dari seseorang yang berusia 30 tahun lebih besar dibandingkan usia hidup 45 tahun dan 60 tahun. Demikian juga untuk usia hidup 45 tahun peluang hidupnya lebih besar dari usia hidup 60 tahun.

Distribusi Anuitas Hidup

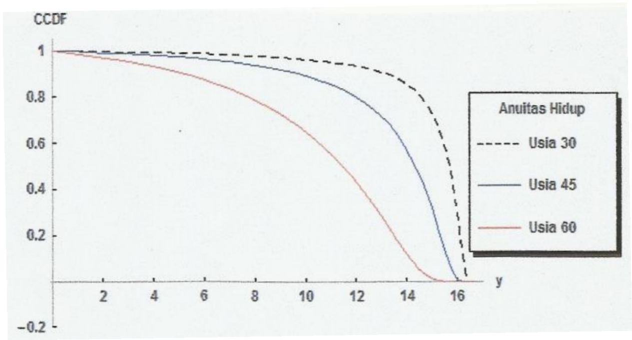
Distribusi dari anuitas hidup kontinu dapat diperoleh dari *pdf cdf* – nya. Selain distribusi anuitas hidup hal lain yang dapat ditentukan melalui *software mathematica®* versi 5.1 adalah nilai – nilai dalam Tabel 2 berikut.

Tabel 2. Nilai Ekspektasi, Variansi, dan standar Deviasi

	Usia 30 Tahun	Usia 45 Tahun	Usia 60 Tahun
Ekspektasi	14,9999	13,3451	10,4854
Variansi	4,26312	8,03594	12,2489
Standar Deviasi	2,06473	2,83654	3,49985

Keterangan : $n = \infty, \delta = 0{,}06$

Bentuk grafik distribusi dari anuitas hidup kontinu untuk usia 30 tahun, 45 tahun, dan 60 tahun dapat digambarkan seperti Gambar 2.



Gambar 2. Distribusi Anuitas Hidup

Nilai – Nilai Anuitas Hidup

Berdasarkan hasil perhitungan menggunakan *software mathematica*® versi 5.1 dengan percepatan pembungaan

$$0,00;0,01;0,02;...;0,15$$

untuk usia hidup 30 tahun, 45 tahun, dan 60 tahun maka diperoleh nilai anuitas hidup yang diperlihatkan dalam Tabel 3.

Tabel 3. Nilai Anuitas Hidup

δ	Usia 30 Tahun			Usia 45 Tahun			Usia 60 Tahun		
	$n=5$	$n=10$	$n=\infty$	$n=5$	$n=10$	$n=\infty$	$n=5$	$n=10$	$n=\infty$
0,00	4,97969	9,9104	45,0669	4,94541	9,7499	31,4076	4,81216	9,1473	19,0923
0,01	4,85742	9,4325	35,6692	4,82428	9,2827	26,4332	4,69546	8,7199	17,0221
0,02	4,73914	8,9852	28,8808	4,7071	8,8453	22,5404	4,58254	8,3194	15,2745
0,03	4,6247	8,5662	23,8791	4,59372	8,4354	19,4575	4,47326	7,9438	13,7898
0,04	4,51396	8,1735	20,1212	4,484	8,0513	16,9874	4,3675	7,5913	12,5207
0,05	4,40679	7,8052	17,2437	4,37782	7,6909	14,9855	4,26512	7,2604	11,4294
0,06	4,30306	7,4597	14,9999	4,27503	7,3527	13,3451	4,166	6,9495	10,4854
0,07	4,20264	7,1353	13,2199	4,17552	7,0351	11,9866	4,07003	6,6573	9,66425
0,08	4,10542	6,8306	11,7848	4,07918	6,7366	10,8503	3,97708	6,3824	8,94609
0,09	4,01127	6,5441	10,6105	3,98588	6,4560	9,89059	3,88706	6,1237	9,31469
0,10	3,92009	6,2746	9,63621	3,89551	6,1920	9,07275	3,79986	5,8801	7,75678
0,11	3,83177	6,0211	8,81768	3,80798	5,9435	8,36986	3,71537	5,6505	7,26143
0,12	3,74621	5,7822	8,1221	3,72317	5,7094	7,76096	3,6335	5,4341	6,81962
0,13	3,66331	5,5572	7,52482	3,641	5,4888	7,22957	3,55416	5,2298	6,42382
0,14	3,58297	5,3450	7,00713	3,56137	5,2806	6,76262	3,47726	5,0369	6,06777
0,15	3,50511	5,1448	6,55457	3,48418	5,0842	6,34965	3,40271	4,8548	5,74621

Jika dihubungkan dengan cicilan pembayaran, misalkan besarnya tanggungan seseorang adalah sebesar satu juta rupiah selama kurun waktu 5 tahun maka besarnya cicilan yang harus dibayarkan untuk anuitas pasti dan anuitas hidup adalah sebagai berikut :

Tabel 4. Cicilan yang Harus Dibayarkan untuk Anuitas Pasti dan Anuitas Hidup dengan Tanggungan Sebesar Rp1.000.000,-

δ	Anuitas Pasti	Anuitas Hidup		
		Usia 30 Tahun	Usia 45 Tahun	Usia 60 Tahun
0,00	200000	200816	202298	207807
0,01	205039	205871	207285	212972
0,02	210167	211009	212445	218220
0,03	215373	216230	217689	223550
0,04	220667	221535	223015	228964
0,05	226039	226922	228424	234460
0,06	231497	232393	233916	240038
0,07	237039	237946	239491	245699
0,08	242659	243581	245147	251440
0,09	248360	249298	250886	257264
0,10	254148	255096	256706	263168
0,11	260017	260976	262607	269152
0,12	265964	266937	268588	275216
0,13	271990	272977	274605	281360
0,14	278102	279098	280791	287583
0,15	284284	285298	287011	293884

Berdasarkan Tabel 4 di atas, dapat dilihat bahwa cicilan anuitas hidup lebih mahal daripada anuitas pasti. Hal ini disebabkan karena faktor *survival* berperan dalam perhitungan premi anuitas hidup. Selain itu, semakin tua usia seseorang cicilan yang harus dibayarkan juga semakin besar.

KESIMPULAN

Dalam pembahasan materi sebelumnya**,** maka dapat disimpulkan bahwa :

1. Bentuk *cdf* dari anuitas hidup kontinu adalah $F_T\left(\frac{-\log(1-\delta y)}{\delta}\right)$, sedangkan bentuk *pdf* – nya adalah $$\frac{f_T\left(\left[-\log(1-\delta y)\right]/\delta\right)}{1-\delta y}.$$
2. Distribusi dari anuitas hidup kontinu adalah $$F_Y(y) = P(Y \le y)$$ $$= F_T\left(\frac{-\log(1-\delta y)}{\delta}\right);\ \text{untuk}\ 0 < y \le \frac{1}{\delta}$$
3. Premi anuitas hidup lebih mahal dibandingkan dengan premi anuitas pasti.

DAFTAR PUSTAKA

Bowers, N. L. Jr., Gerber, H.U., Hickman, J.C., Jones, D.A., dan Nesbitt, C. J., (1997). *Actuarial Mathematics*. Edisi Kedua, Society of Actuaries, Schaumburg, IL.

Dudewicz, E. J. dan Mishra, S. N. (1998). *Statistika Matematika Modern*, ITB Bandung.

Futami, Takashi. (1993). *Matematika Asuransi Jiwa*, The Kyoei Life Insurance co.ltd.Tokyo,Japan.