Jurnal Barekeng
Vol. 8 No. 2 Hal. 19 – 26 (2014)

Barekeng
jurnal ilmu matematika dan terapan

SISTEM ORTONORMAL DALAM RUANG HILBERT

Orthonormal Systems in Hilbert Space

ZETH ARTHUR LELEURY
Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Pattimura
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon
E-mail: zetharthur82@gmail.com

ABSTRACT

Hilbert space is one of the important inventions in mathematics. Historically, the theory of Hilbert space originated from David Hilbert's work on quadratic form in infinitely many variables with their applications to integral equations. This paper contains some definitions such as vector space, normed space and inner product space (also called pre-Hilbert space), and which is important to construct the Hilbert space. The fundamental ideas and results are discussed with special attention given to finite dimensional pre-Hilbert space and some basic propositions of orthonormal systems in Hilbert space. This research found that each finite dimensional pre-Hilbert space is a Hilbert space. We have provided that a finite orthonormal systems in a Hilbert space X is complete if and only if this orthonormal systems is a basis of X.

Keywords: *Hilbert space, Inner product space, Orthonormal systems, Pre-Hilbert space*

PENDAHULUAN

Ruang Hilbert diperkenalkan oleh David Hilbert (1862-1943), seorang ahli matematika yang sangat terkenal pada generasinya. Penelitian yang dilakukannya menciptakan dasar dari pekerjaannya mengenai "ruang dimensi tak terbatas", yang kemudian disebut dengan ruang Hilbert, suatu konsep yang sangat diperlukan dalam matematika analisis.

Ruang Hilbert merupakan ruang vektor atas suatu lapangan, dimana pada ruang vektor tersebut juga terdapat suatu *inner product* dan *norm*, sedemikian sehingga setiap barisan Cauchy konvergen ke suatu elemen di dalamnya. Hal ini disebut dengan penyempurnaan sifat dari ruang vektor. Selanjutnya dalam tesisnya yang berjudul *Learning in Hilbert Spaces*, Nimit Kumar juga mencoba menyusun suatu konsep tentang konvergensi barisan dalam ruang ber-*norm* yang mempunyai konsekuensi alami terhadap barisan Cauchy dan gagasan kelengkapannya (Kumar, 2004).

Dalam kaitan dengan Ruang Hilbert $L_2(-\pi,\pi)$, pada tahun 1907, Fischer dan Riesz membuktikan suatu jawaban natural untuk masalah konvergensi deret Fourier klasik (Zeidler, 1995). Dalam penelitian ini akan ditunjukkan bahwa hal tersebut merupakan suatu kasus khusus dari suatu hasil abstrak pada sistem ortonormal dalam ruang Hilbert. Selain itu juga dibahas beberapa sifat atau teorema tentang ruang pre Hilbert dan ruang Hilbert serta pembuktiannya. Diharapkan melalui penelitian ini, masalah-masalah dalam ruang pre Hilbert dengan dimensi terbatas dan sistem ortonormal dalam ruang Hilbert yang ditemui serta bentuk pengembangannya akan lebih mudah dipahami.

METODOLOGI PENELITIAN

Tipe penelitian ini adalah studi pustaka yaitu mempelajari beberapa *textbook* dan jurnal yang berhubungan dengan penulisan, Kemudian mencoba membahas inti permasalahan tersebut dengan menuangkan secara benar. Penelitian ini dilakukan dengan cara mengumpulkan, mempelajari dan menganalisis *textbook* dan jurnal yang berkaitan dengan permasalahan yang diteliti. Hasil-hasil yang diperoleh dalam penelitian ini berupa pembuktian teorema dan akibat dengan menggunakan bantuan beberapa definisi dengan tetap memperhatikan keterkaitan yang ada.

KAJIAN PUSTAKA

Pada bagian ini dikaji definisi dan beberapa teorema dari ruang vektor, ruang ber-*norm*, ruang *inner product* dan ruang pre-Hilbert sebagai konsep dasar dari pembahasan sistem ortonormal dalam Ruang Hilbert.

Ruang Vektor

Konsep dasar ruang vektor yang digunakan sebagai landasan pada pembicaraan selanjutnya adalah rentang(*span*), basis, dan dimensi.

Definisi 1. (ruang vektor)
Sistem X merupakan ruang vektor atas lapangan F, terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan skalar jika memenuhi aksioma-aksioma di bawah ini :

I. Terhadap operasi penjumlahan.
1.Tertutup ($\forall v_1,v_2\in X$) $v_1 + v_2\in X$
2.Asosiatif ($\forall v_1,v_2,v_3\in X$) $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$
3.Terdapat elemen netral ($\exists \mathbf{0}\in X$)($\forall v\in X$) $\mathbf{0}+v=v+\mathbf{0}=v$
4.Setiap elemen mempunyai invers ($\forall v\in X$) ($\exists -v\in X$) $v + (-v) = -v + v = \mathbf{0}$
5.Komutatif ($\forall v_1,v_2\in X$) $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$

II. Tertutup terhadap pergandaan skalar.
($\forall v\in X$), $\alpha\in F$ maka $\alpha v\in X$
$\bullet$: $F \times X \to X$
$$(\alpha,v) \to \bullet(\alpha,v) \overset{nt}{=} \alpha\bullet v \overset{df}{=} \alpha v\in X$$

III. Untuk setiap $v_1,v_2\in X$; $\alpha,\beta\in F$
1. $(\alpha + \beta)v_1 = \alpha v_1 + \beta v_1$
2. $\alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$
3. $(\alpha\beta)v_1 = \alpha(\beta v_1)$
4. $1_F . v_1 = v_1$

selanjutnya ruang vektor X atas lapangan F dinotasikan dengan $X(F)$. (Steven, 2001)

Definisi 2. (rentang/span)
Misalkan $v_1, v_2,..., v_n$ adalah vektor-vektor dalam suatu ruang vektor X. Jumlah vektor-vektor berbentuk $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$, dimana $\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n$ adalah skalar-skalar disebut suatu kombinasi linear dari $v_1, v_2,..., v_n$. Himpunan semua kombinasi linear dari $v_1, v_2,..., v_n$ disebut rentang dari $v_1, v_2,..., v_n$. Rentang dari $v_1, v_2,..., v_n$ akan dinyatakan dengan Rentang $(v_1, v_2,..., v_n)$. (Anton, 1987)

Definisi 3. (basis)
Jika X adalah sebarang ruang vektor dan $S = \{v_1, v_2,..., v_n\}$ adalah suatu himpunan vektor-vektor dalam X, maka S disebut suatu basis untuk X jika S bebas linear dan merentang X. (Anton, 1987)

Definisi 4. (dimensi)
Suatu ruang vektor X disebut berdimensi terbatas jika X berisi suatu himpunan vektor terbatas $\{v_1, v_2,..., v_n\}$ yang membentuk suatu basis. Jika tidak ada himpunan seperti itu, maka X disebut berdimensi tak terbatas dan ditulis $\dim X = \infty$. Jika X memiliki basis yang terdiri dari n vektor, maka dikatakan bahwa X memiliki dimensi n. Ruang bagian $\{\mathbf{0}\}$ dari X dikatakan memiliki dimensi 0. (Anton, 1987)

Ruang Ber-*Norm*

Ruang ber-*norm* adalah suatu ruang vektor dengan *norm* yang didefinisikan di dalamnya.

Definisi 5. (norm)
Diberikan ruang vektor X. Suatu fungsi riil $\|.\| : X \to$ R, disebut *norm* jika memenuhi :
1. $\| x \| \geq 0, \ \forall x \in X$
2. $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$
3. $\| \alpha x \| = |\alpha| \, \|x\|, \quad \forall x \in X, \forall \alpha \in R$
4. $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|, \quad \forall x, y \in X$

(Kreyszig,1978)

Teorema 1.
Misalkan $\{u_n\}$ suatu barisan dalam ruang ber-*norm* berdimensi terbatas dengan $\dim X > 0$.
$$u_n \to u \text{ dalam } X, \ n \to \infty$$
jika dan hanya jika komponen-komponennya saling berhubungan (*corresponding components*) satu sama lain dengan respek bahwa sebarang basis konvergen. (Zeidler,1995)

Definisi 6.
Suatu barisan vektor $\{x_n\}$ dalam ruang be-*norm* disebut barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan M sedemikian sehingga $\| x_m - x_n \| < \varepsilon$ untuk setiap $m,n > M$. Dengan kata lain
$$\lim_{m,n\to\infty} \| x_m - x_n \| = 0$$
(Zeidler,1995)

Teorema 2.
Misalkan $\{u_n\}$ suatu barisan Cauchy dalam ruang ber-*norm* X atas F yang memiliki barisan bagian $\{u_{n'}\}$ yang konvergen, yakni
$$u_{n'} \to u \text{ dalam } X, \text{ untuk } n \to \infty$$
Maka, keseluruhan barisan konvergen ke u. Dengan kata lain $u_n \to u$ dalam X, untuk $n \to \infty$
(Zeidler,1995)

Ruang *Inner product*

Definisi 7. (ruang inner product)
Misalkan X ruang vektor atas lapangan F. Suatu fungsi $\langle .,. \rangle : X \times X \to F$ disebut *inner product* jika memenuhi aksioma-aksioma berikut :

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$
2. $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$
3. $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle$
4. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
5. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

untuk setiap $x,y,z \in X$ dan $\alpha \in F$

Suatu ruang vektor X bersama-sama dengan *inner product* disebut ruang *inner product*. Suatu ruang *inner product* adalah lengkap jika setiap barisan Cauchy dalam X konvergen ke suatu titik dalam X.
(Kreyszig,1978)

Ruang Pre Hilbert

Definisi 8. (ruang pre Hilbert)
Misalkan X ruang vektor atas lapangan F, dimana $F = R$ atau $F = C$. Suatu *inner product* pada X memberikan setiap pasangan $\langle u, v \rangle$ dengan $u, v \in X$ dan $\langle u, v \rangle \in F$ Sedemikian sehingga menunjukkan bahwa untuk setiap $u, v,\ w \in X$ dan $\alpha, \beta \in F$ berlaku :

i. $\langle u, u \rangle \geq 0$ dan $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$;

ii. $\langle u, \alpha v + \beta w \rangle = \alpha \langle u, v \rangle + \beta \langle u, w \rangle$;

iii. $\overline{\langle u, v \rangle} = \langle v, u \rangle$ (bar menunjukkan konjugat bilangan kompleks).

Suatu ruang pre Hilbert atas F adalah ruang vektor X atas F bersama dengan suatu *inner product*.
Dari (ii) dan (iii) diperoleh bahwa :

$$\langle \alpha v + \beta w, u \rangle = \overline{\alpha} \langle v, u \rangle + \overline{\beta} \langle w, u \rangle$$

untuk setiap $u, v, w \in X$ dan $\alpha, \beta \in F$ (Zeidler,1995)

Teorema 3. (Ketaksamaan Cauchy-Schwarz)
Misalkan X adalah ruang pre Hilbert, maka berlaku :

$$|\langle u, v \rangle| \leq \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}} \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \quad \text{untuk setiap } u,v \in X$$

atau dapat ditulis dalam bentuk norm:

$$|\langle u, v \rangle| \leq \| u \| \, \| v \| \qquad \text{untuk setiap } u,v \in X$$

(Zeidler,1995)

Teorema 4.
Misalkan X adalah ruang pre Hilbert, maka :

i. *Inner product* adalah kontinu, sehingga

$$u_n \to u \quad \text{dan} \quad v_n \to v, \quad n \to \infty$$

Mengandung arti $\langle u_n, v_n \rangle \to \langle u, v \rangle$, $n \to \infty$

ii. Misalkan M adalah dense *subset* dari X. Jika

$\langle u, v \rangle = 0$ untuk $u \in X$ dan setiap $v \in M$, maka $u = 0$

Bukti

(i) Jika $\{v_n\}$ terbatas, maka dari ketaksamaan Schwarz (4.3) diperoleh bahwa:

$$\begin{aligned} \| \langle u_n, v_n \rangle - \langle u, v \rangle \| &= \| \langle u_n - u, v_n \rangle + \langle u, v_n - v \rangle \| \\ &\leq \| \langle u_n - u, v_n \rangle \| + \| u, v_n - v \| \\ &\leq \| \langle u_n - u \rangle \| \, \| v_n \| + \| u \| \, \| \langle v_n - v \rangle \| \to 0, \end{aligned}$$
$n \to \infty$

(ii) Jika M adalah *dense* dalam X, terdapat suatu barisan $\{v_n\}$ dalam M sedemikian sehingga $v_n \to u$ dalam X, $n \to \infty$. Misalkan $n \to \infty$, berarti $\langle u, v_n \rangle = 0$ untuk setiap n. Maka $\langle u, u \rangle = 0$. Dengan demikian diperoleh bahwa $u = 0$. ■

PEMBAHASAN

Sebelum membahas mengenai sistem ortonormal dalam ruang Hilbert, terlebih dahulu dibahas tentang definisi dan beberapa teorema dasar dari ruang Hilbert yang nantinya akan digunakan untuk pembuktian sifat-sifat pada sistem ortonormal dalam Ruang Hilbert. Selain itu juga disajikan contoh ruang Hilbert dalam kaitannya dengan ruang pre-Hilbert dalam dimensi terbatas.

Ruang Hilbert

Definisi 9. (Ruang Hilbert)
Suatu ruang vektor X atas F adalah ruang Hilbert jika dan hanya jika berlaku sifat berikut :
(i) Terdapat suatu *inner product* dalam X, dan
(ii) Setiap barisan Cauchy dengan *norm* $\|u\|$ adalah konvergen.
(Zeidler,1995)

Teorema 5.
Setiap ruang pre-Hilbert dengan dimensi terbatas adalah ruang Hilbert.

Bukti
Misalkan dim X = 0. Maka $X = \{0\}$ dan pernyataan ini trivial. Misalkan dim $X > 0$. Anggap bahwa $\{u_n\}$ adalah suatu barisan Cauchy. Karena dua *norm* dalam (4.3) ruang vektor dengan dimensi terbatas X atas F selalu ekivalen, maka dapat ditulis $|\alpha_{nj} - \alpha_{mj}| \leq b\|u_n - u_m\| < \varepsilon$ untuk setiap $n, m \geq n_0(\varepsilon)$ dan $\forall j$.
Karena komponen–komponen berhubungan satu sama lain, akibatnya setiap barisan $\{\alpha_{nj}\}$ juga Cauchy. Karenanya diperoleh

$$\alpha_{jn} \to \alpha_j, \quad n \to \infty$$

untuk setiap j. Dari Teorema1 diperoleh bahwa

$$u_n \to u \text{ dalam } X, \quad n \to \infty \ \blacksquare$$

Contoh (Ruang Hilbert $L_2(a,b)$) :
Anggap bahwa $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

Misalkan $L_2(a,b)$ adalah notasi himpunan semua fungsi terukur.

$$u:(a,b)\to R$$

Sedemikian sehingga $\int_a^b |u|^2\,dx<\infty$. Maka

(i) $L_2(a,b)$ adalah suatu ruang Hilbert real dengan *inner product* :

$$\langle u,v\rangle=\int_a^b uv\,dx \quad \text{untuk setiap } u,v\in L_2(a,b).$$

(ii) dim $L_2(a,b)=\infty$

Dengan tepat, digunakan mengikuti prinsip identifikasi

(I) Dua fungsi u dan v berhubungan dengan elemen yang sama dalam ruang Hilbert $L_2(a,b)$ jika dan hanya jika $u(x)=v(x)$ untuk setiap $x\in(a,b)$.

Sehingga, elemen $L_2(a,b)$ adalah kelas fungsi yang ditandai oleh (I).

Bukti

Akan ditunjukan (i).

Langkah 1: Ketaksamaan Schwarz

Akan ditunjukkan bahwa jika $u,v\in L_2(a,b)$, maka integral $\int_a^b uv\,dx$ ada

dan

$$\left|\int_a^b uv\,dx\right|\le\left(\int_a^b |u|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b |v|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (1)$$

Untuk membuktikan ini, dimulai dengan mudah, ketaksamaan klasik

$$|\xi\eta|\le 2^{-1}\left(|\xi|^2+|\eta|^2\right) \text{ untuk setiap } \xi,\eta\in C, \qquad (2)$$

yang mana ditunjukkan dari

$0\le\left(|\xi|-|\eta|\right)^2=|\xi|^2-2|\xi||\eta|+|\eta|^2$.

Diberikan

$$\|u\|=\left(\int_a^b |u|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pertama misalkan $\|u\|=0$ atau $\|v\|=0$. Maka $u(x)=0$ atau $v(x)=0$ untuk setiap $x\in(a,b)$,

Oleh sebab itu $\int_a^b uv\,dx=0$, Berarti ketaksamaan (1) adalah benar.

Anggap sekarang bahwa $\|u\|\ne 0$ dan $\|v\|\ne 0$. Gantikan u dengan $\frac{u}{\|u\|}$ dan v dengan $\frac{v}{\|v\|}$, jika perlu, boleh diasumsikan bahwa $\|u\|=1$ dan $\|v\|=1$. Dari ketaksamaan (1),

$$|u(x)\,v(x)|\le 2^{-1}\left(|u(x)|^2+|v(x)|^2\right) \text{untuk } x\in(a,b) \qquad (3)$$

Jika fungsi u dan v terukur pada (a,b), maka uv adalah *product*. Dari ketaksamaan (3), terdapat integral $\int_a^b |u|^2\,dx$ and $\int_a^b |v|^2\,dx$ dan secara tidak langsung integral $\int_a^b |uv|\,dx$ ada, dan karenanya terdapat $\int_a^b uv\,dx$.

Selanjutnya, dengan mengikuti ketaksamaan (3) diperoleh bahwa

$$\left|\int_a^b uv\,dx\right|\le\int_a^b |uv|\,dx\le 2^{-1}\left(\int_a^b |u|^2\,dx+\int_a^b |v|^2\,dx\right)$$

$$=1=\|u\|\|v\|$$

ini adalah ketaksamaan yang dikehendaki oleh ketaksamaan (1).

Langkah 2:

Akan ditunjukkan bahwa $L_2(a,b)$ adalah ruang vektor.

Untuk setiap $\alpha,\beta\in R$ dan $x\in(a,b)$,

$$|\alpha\,u(x)+\beta\,v(x)|^2\le|\alpha|^2\,|u(x)|^2+|2\alpha\beta|\,|u(x)\,v(x)|+|\beta|^2\,|v(x)|^2$$

Misalkan $u,v\in L_2(a,b)$. Maka, integral $\int_a^b |u|^2\,dx$ dan $\int_a^b |v|^2\,dx$ ada. Dari langkah 1, secara tidak langsung terdapat $\int_a^b |uv|\,dx$. Oleh sebab itu integral

$$\int_a^b |\alpha\,u+\beta\,v|^2\,dx$$

ada, atau dengan kata lain $\alpha\,u+\beta\,v\in L_2(a,b)$.

Langkah 3:

Akan ditunjukkan bahwa

$\langle u,v\rangle=\int_a^b uv\,dx$ adalah suatu *inner product* pada $L_2(a,b)$

Pertama akan ditujukkan bahwa

$$\langle u,u\rangle=0\Leftrightarrow u=0.$$

Misalkan $\langle u,u\rangle=0$. maka

$\int_a^b |u|^2\,dx=0$ sehingga $u(x)=0$ untuk setiap $x\in(a,b)$

Dari prinsip identifikasi (I), diperoleh bahwa fungsi $u=u(x)$ berhubungan dengan elemen nol $u=0$ dalam $L_2(a,b)$. Sebaliknya, misalkan $u=0$ elemen nol dalam $L_2(a,b)$. Dari (I), elemen ini berhubungan dengan kelas semua fungsi u dimana $u(x)=0$ untuk setiap $x\in(a,b)$.

Oleh sebab itu, $\langle u,u\rangle=0$. Selanjutnya, jika

$u(x)=u_1(x)$ and $v(x)=v_1(x)$ untuk setiap $x\in(a,b)$ diperoleh bahwa $u(x)\,v(x)=u_1(x)\,v_1(x)$ untuk setiap $x\in(a,b)$, dan

$$\int_a^b uv\,dx=\int_a^b u_1(x)\,v_1(x)\,dx_1$$

atau dengan kata lain $\langle u,v\rangle = \langle u_1, v_1\rangle$.

Akibatnya, *inner product* berkenaan dengan prinsip identifikasi (I), atau dengan kata lain tergantung hanya pada kelas fungsi yang sesuai.

Terakhir, jika $u, v, w \in L_2(a,b)$, maka $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$ dan

$$\int_a^b u\,(\alpha\, v + \beta\, w)\, dx = \alpha \int_a^b uv\, dx + \beta \int_a^b uw\; dx\,,$$

Atau $\langle u, \alpha\, v + \beta\, w\rangle = \alpha\langle u, v\rangle + \beta\langle u, w\rangle$

Akibatnya, $L_2(a,b)$ adalah suatu ruang pre Hilbert. Jelas, ketaksamaan Schwarz

$$|\langle u, v\rangle| \le \|u\|\,\|v\| \quad \text{untuk setiap } u, v \in L_2(a,b)$$

sesuai untuk ketaksamaan Schwarz klasik (2) dari Langkah 1.

Langkah 4: ruang Hilbert.

Akan ditunjukkan bahwa $L_2(a,b)$ adalah ruang Hilbert. Untuk yang terakhir ini, harus ditunjukkan bahwa setiap barisan Cauchy dalam $L_2(a,b)$ adalah konvergen. Berdasarkan Definisi 6, cukup dibuktikan bahwa setiap barisan Cauchy dalam $L_2(a,b)$ mempunyai barisan bagian yang konvergen.

Misalkan $\{u_n\}$ suatu barisan Cauchy dalam $L_2(a,b)$, atau

$$\|u_n - u_m\| < \varepsilon \quad \text{untuk setiap } n, m \ge n_0(\varepsilon).$$

Pilih $\varepsilon = 2^{-k}$, $k = 1, 2, \ldots$

dan terdapat bilangan asli $n_1 \le n_2 \le \ldots$ sehingga

$$\left\|u_{n_{k+1}} - u_{n_k}\right\| \le 2^{-k} \quad \forall\, k = 1, 2, \ldots$$

Himpunan $v_k = u_{n_k}$ dan $s_m(x) = \sum_{k=1}^{m} |v_{k+1}(x) - v_k(x)|$.

Jika barisan $\{s_m(x)\}$ adalah monoton naik, maka $S(x) = \lim_{m\to\infty} s_m(x)^2$ ada untuk setiap $x \in (a,b)$, dimana $0 \le S(x) \le \infty$. Jika $L_2(a,b)$ adalah ruang pre Hilbert, maka ketaksamaan segitiga berlaku. Oleh sebab itu,

$$\|s_m\| \le \sum_{k=1}^{m} \|v_{k+1} - v_k\| \le 2^{-1} + 2^{-2} + \ldots \le 1 \quad \text{untuk } m \ge 1$$

sehingga

$$\int_a^b s_m(x)^2\, dx \;\; \le 1 \quad \text{untuk setiap } m \ge 1.$$

Dengan demikian, dari lemma Fatou, fungsi S adalah terintegral atas (a,b) dengan

$$\int_a^b S(x)\, dx = \int_a^b \lim_{m\to\infty} s_m(x)^2\, dx \le \underline{\lim}_{m\to\infty} \int_a^b s_m(x)^2\, dx \le 1.$$

Khususnya, $S(x)$ terbatas untuk setiap $x \in (a,b)$. Misalkan pada titik-titik ujungnya (*remaining points*) didefinisikan kembali S dengan aturan $S(x) = 0$.

Misalkan $s(x) = S(x)^{\frac{1}{2}}$, diperoleh

$$s(x) = \lim_{m\to\infty} s_m(x) \quad \text{untuk setiap } x \in (a,b), \qquad (4)$$

dan $\int_a^b s^2\, dx \le 1$, atau dengan kata lain $s \in L_2(a,b)$.

Selanjutnya dengan menggunakan sifat

$$v_m(x) = v_1(x) + \sum_{k=1}^{m-1} v_{k+1}(x) - v_k(x). \qquad (5)$$

Dari (4),

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |v_{k+1}(x) - v_k(x)| < \infty \quad \text{untuk } x \in (a,b) \qquad (6)$$

Dengan demikian, limit terbatas $v(x) = \lim_{m\to\infty} v_m(x)$ ada untuk setiap $x \in (a,b)$. Pada titik ujung x dari interval (a,b) ditetapkan bahwa $v(x) = 0$. Seperti limit dari fungsi terukur v_m, fungsi v adalah juga terukur pada interval (a,b).

Sesuai dengan persamaan (5) dan (6),

$$|v(x)| \le |v_1(x) + s(x)| \quad \text{untuk setiap } x \in (a,b). \qquad (7)$$

Jika $v_1 \in L_2(a,b)$, diperoleh $|v_1|$, $s \in L_2(a,b)$, dan karenanya $|v_1| + s \in L_2(a,b)$, dari Langkah 2. Dengan mengikuti ketaksamaan (7) diperoleh bahwa

$$\int_a^b |v(x)|^2\, dx \le \int_a^b \left(|v_1(x)| + s\right)^2 dx < \infty\,,$$

Atau dengan kata lain $v \in L_2(a,b)$.

Terakhir, akan ditunjukan bahwa

$$v_n \to v \text{ dalam } L_2(a,b),\; n \to \infty. \qquad (8)$$

Jika $\{v_n\}$ adalah suatu barisan Cauchy, untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $m_0(\varepsilon)$ sedemikian sehingga

$$\|v_n - v_m\|^2 \equiv \int_a^b |v_n - v_m|^2\, dx \le \varepsilon^2$$

untuk setiap $n, m \ge m_0(\varepsilon)$.

Misalkan $m \to \infty$, dengan mengikuti lemma Fatou diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} \|v_n - v\|^2 &\equiv \int_a^b |v_n(x) - v(x)|^2\, dx \\ &= \int_a^b \lim_{m\to\infty} |v_n(x) - v_m(x)|^2\, dx \\ &\le \underline{\lim}_{m\to\infty} \int_a^b |v_n(x) - v_m(x)|^2\, dx \le \varepsilon^2\,, \end{aligned}$$

untuk setiap $n \ge m_0(\varepsilon)$. Ini adalah (8)

Akan ditunjukkan (ii). Pilih suatu interval $[c,d]$ dengan $[c,d] \subseteq\,]a,b[$ dan $c < d$. Didefinisikan

$$u_n(x) = \begin{cases} x^n & \text{jika } x \in [c,d] \\ 0 & \text{untuk yang lain} \end{cases}$$

Maka $u_n \in L_2(a,b)$ untuk setiap $n = 0, 1, 2, \ldots$

sehingga diperoleh bahwa fungsi $u_0, \ldots., u_n$ bebas linear untuk setiap n. Karenanya dim $L_2(a,b) = \infty$. ■

Sistem Ortonormal

Pada bagian ini diasumsikan bahwa :
(H) Misalkan *X* suatu ruang Hilbert atas *F* = *R* = *C*, dan $\{u_0, u_1, \ldots\}$ sistem ortonormal terbatas atau terbilang dalam *X*. Dengan kata lain, menurut definisi,

$$\langle u_k, u_m \rangle = \delta_{km} \quad \text{untuk setiap } k, m \tag{9}$$

Sasaran utama adalah mempelajari konvergensi yang disebut Deret Fourier abstrak

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \langle u_n, u \rangle u_n \,. \tag{10}$$

juga ditetapkan

$$s_m = \sum_{n=0}^{m} \langle u_n, u \rangle u_n \,. \tag{11}$$

Nilai $\langle u_n, u \rangle$ disebut koefisien Fourier dari *u*.

Definisi 10.
Asumsikan (H). Sistem ortonormal terbatas $\{u_0, \ldots, u_n\}$ dikatakan lengkap dalam *X* jika dan hanya jika

$$u = \sum_{n=0}^{n} \langle u_n, u \rangle u_n \quad \text{untuk setiap } u \in X \tag{12}$$

Sistem ortonormal terbilang $\{u_0, u_1, \ldots\}$ dikatakan lengkap dalam *X* jika dan hanya jika deret tak terbatas (10) konvergen untuk setiap $u \in X$. Artinya,

$$u = \lim_{m\to\infty} s_m \quad \text{untuk setiap } u \in X \,.$$

(Zeidler,1995)

Teorema 6.
Sistem ortonormal terbatas $\{u_0, \ldots, u_n\}$ lengkap dalam ruang Hilbert *X* atas *F* jika dan hanya jika sistem ortonormal tersebut merupakan suatu basis dari *X*.

Bukti
$(\Leftarrow)$ Misalkan $\{u_n\}$ suatu basis dalam *X*. Maka

$$u = \sum_{n=0}^{n} c_n u_n \quad \text{untuk setiap } u \in X \tag{13}$$

dimana koefisien $c_0, \ldots, c_n \in F$ tergantung pada *u*. Gunakan (9), diperoleh

$$\langle u_k, u \rangle = \sum_{n=0}^{n} c_n \langle u_k, u_n \rangle = c_k \,, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Ini tersirat dalam persamaan (12). Berarti $\{u_n\}$ lengkap.

$(\Rightarrow)$ Misalkan $\{u_n\}$ suatu sistem ortonormal yang lengkap; Maka $\{u_n\}$ merupakan basis dalam *X*, oleh persamaan (12). Dalam hubungan ini, catat bahwa $\{u_0, \ldots, u_n\}$ adalah bebas linier, jika persamaan (13) dengan *u* = 0.
Berarti $c_k = 0$ untuk setiap nilai *k*. ■

Akibat 7.
Misalkan $\{u_n\}$ suatu sistem ortonormal terbilang dalam ruang Hilbert atas *F*. Asumsikan bahwa deret tak terbatas

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n \quad \text{dengan } c_n \in F, \forall n$$

konvergen untuk sebarang $u \in X$ maka $c_n = \langle u_n, u \rangle \; \forall n$

Bukti
Dengan menggunakan persamaan (9) diperoleh

$$\langle u_k, u \rangle = \lim_{m\to\infty} \left\langle u_k, \sum_{n=0}^{m} c_n u_n \right\rangle = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} c_n \langle u_k, u_n \rangle = c_k \,. \blacksquare$$

Ini merupakan pendukung persamaan (10). Akan diberikan suatu pendukung kedua untuk persamaan (4.10). Dalam rangka mendapatkan suatu aproksimasi terbaik dari *u* oleh suatu kombinasi linier $c_0 u_0 + \ldots + c_m u_m$, diberikan

$$f(c_0, \ldots, c_m) = \left\| u - \sum_{n=0}^{m} c_n u_n \right\|^2,$$

dan dipertimbangkan masalah minimum berikut :

$$f(c_0, \ldots, c_m) = \min!, \qquad c_0, \ldots, c_m \in F \tag{14}$$

Teorema 8.
Asumsikan (H). Maka, solusi tunggal dari persamaan (14) diberikan melalui koefisien Fourier
$c_n = \langle u_n, u \rangle,\ n = 0, \ldots, m.$

Bukti
Dari persamaan (9),

$$\begin{aligned} f(c) &= \left\langle u - \sum_{n=0}^{m} c_n u_n, u - \sum_{k=0}^{m} c_k u_k \right\rangle \\ &= \langle u, u \rangle - \sum_{n-0}^{m} \bar{c}_n \langle u_n, u \rangle - \sum_{k=0}^{m} c_k \langle u, u_k \rangle + \sum_{n=0}^{m} \bar{c}_n c_n \end{aligned}$$

Oleh sebab itu,

$$f(c) = \|u\|^2 - \sum_{n=0}^{m} |\langle u_n, u \rangle|^2 + \sum_{n=0}^{m} |\langle u_n, u \rangle - c_n|^2 \tag{15}$$

Nilai terkecil dari *f* dicapai untuk

$$c_n = \langle u_n, u \rangle, \quad n = 0, \ldots, m. \qquad \blacksquare$$

Khususnya, dari persamaan (11) diperoleh bahwa

$$\|u - s_m\|^2 \le f(c) \text{ untuk setiap } c \in F^m \text{ dan } \forall m. \tag{16}$$

Dari persamaan (15)

$$\|u - s_m\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{n=0}^{m} |\langle u_n, u \rangle|^2 \tag{17}$$

untuk setiap $u \in X$ dan $\forall m$.
Karenanya diperoleh ketaksamaan Bessel berikut :

$$\sum_{n=0}^{m} |\langle u_n, u \rangle|^2 \le \|u\|^2 \text{ untuk setiap } u \in X \text{ dan } \forall m \,. \tag{18}$$

Teorema 9. (Kriteria Konvergensi)
Misalkan $\{u_n\}$ suatu sistem ortonormal terbilang dalam ruang Hilbert atas *F*.

Maka deret

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n, \quad c_n \in F,\ \forall n,$$

konvergen jika dan hanya jika deret $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2$ konvergen.

Bukti

$(\Leftarrow)$ Misalkan $S_m = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n$. Dari persamaan (9),

$$\|S_{m+k} - S_m\|^2 = \left\| \sum_{n=m+1}^{m+k} c_n u_n \right\|^2 = \sum_{n=m+1}^{m+k} |c_n|^2 \qquad (19)$$

untuk setiap $m, k = 1, 2, \ldots$

Jika $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2$ konvergen, maka $\{S_m\}$ merupakan suatu barisan Cauchy. Karenanya $\{S_m\}$ konvergen. Dengan kata lain, $\sum_n c_n u_n$ konvergen.

$(\Rightarrow)$ Jika $\sum_n c_n u_n$ konvergen, maka $\{S_m\}$ merupakan suatu barisan Cauchy, dan karenanya $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2$ konvergen, dari persamaan (19). ■

Dengan mengikuti Teorema 9 dan ketaksamaan Bessel (18), maka diperoleh bahwa deret Fourier konvergen untuk setiap $u \in X$. Dengan kata lain, terdapat beberapa $v \in X$ sedemikian sehingga $v = \sum_{n=0}^{\infty} \langle u_n, u \rangle u_n$.

Bagaimanapun, ini mungkin bila $v \neq u$. Tetapi jika sistem ortonormal $\{u_n\}$lengkap, maka $v = u$ untuk setiap $u \in X$.

Teorema 10.

Misalkan $\{u_n\}$suatu sistem ortonormal terbilang dalam ruang Hilbert atas *F*. Maka, dua pernyataan berikut adalah ekivalen :

(i) Sistem $\{u_n\}$lengkap dalam *X*.

(ii) Span / rentangan $\{u_n\}$ dense (rapat) dalam *X*.

Bukti

(i) $\Rightarrow$ (ii). Ini jelas, oleh Definisi 10

(ii)$\Rightarrow$(i). Diberikan $\varepsilon > 0$, terdapat koefisien $c_0, \ldots, c_m \in F$ sedemikian sehingga

$$f(c) = \left\| u - \sum_{n=0}^{m} c_n u_n \right\|^2 < \varepsilon .$$

Dapat diasumsikan juga bahwa *m* cukup besar, dengan memisalkan $c_n = 0$ untuk *n* besar. Pilih $\varepsilon = \frac{1}{r}, r = 1, 2, \ldots$, dengan mengikuti ketaksamaan (16) bahwa terdapat suatu barisan bagian $\{s_{m_r}\}$ sedemikian sehingga

$$\|u - s_{m_r}\| < \frac{1}{r},\ r = 1, 2, \ldots \qquad (20)$$

Jika suatu Deret Fourier selalu konvergen, maka barisan $\{s_m\}$ konvergen. Dengan kata lain, $s_m \to v,\ m \to \infty$. Misalkan $r \to \infty$, dari ketaksamaan (20) dperoleh bahwa *v* = *u*. ■

Akibat 11.

Misalkan $\{u_n\}$suatu sistem ortonormal terbilang yang lengkap dalam ruang Hilbert atas *F*. Maka, pernyataan-pernyataan berikut dianggap benar :

(i) Untuk setiap $u, v \in X$,

$$\langle u, v \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{c_n(u)}\, c_n(v) \qquad \text{(persamaan Parseval),}$$

(ii) Untuk setiap $u \in X$, ketaksamaan Bessel digantikan dengan yang disebut persamaan Parseval khusus

$$\|u\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle u_n, u \rangle|^2 .$$

(iii) Jika $\langle u_n, u \rangle = 0$ untuk setiap *n* dan $u \in X$, maka *u* = 0.

Bukti

(i). Dari persamaan (9) dan persamaan (10),

$$\langle u, v \rangle = \lim_{m\to\infty} \left\langle \sum_{n=0}^{m} c_n(u) u_n, \sum_{k=0}^{m} c_k(v) u_n \right\rangle = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} \overline{c_n(u)}\, c_n(v)$$

.

(ii) Ini adalah kasus khusus dari (i).

(iv) Ini ditunjukan dari persamaan (10). ■

KESIMPULAN

Dari pembahasan pada bagian sebelumnya, maka dapat disimpulkan bahwa:

1. Setiap ruang Pre Hilbert dengan dimensi terbatas adalah ruang Hilbert.
2. Sistem ortonormal terbatas $\{u_0, \ldots, u_n\}$ lengkap dalam ruang Hilbert *X* jika dan hanya jika sistem ortonormal tersebut merupakan suatu basis dari *X*.
3. Dengan asumsi bahwa deret tak terbatas $u = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n$ konvergen untuk sebarang $u \in X$ maka $c_n = \langle u_n, u \rangle$ dengan merupakan sistem ortonormal terbilang dalam ruang Hilbert.
4. Untuk sistem ortonormal terbilang $\{u_n\}$dalam ruang Hilbert maka deret $\sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n$ konvergen jika dan hanya jika deret $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2$ konvergen.
5. Sistem ortonormal terbilang yang lengkap dalam ruang Hilbert saling ekivalen dengan pernyataan bahwa rentangan dari sistem ortonormal tersebut *dense* dalam ruang Hilbert tersebut .
6. Jika sistem ortonormal terbilang yang lengkap dalam ruang Hilbert atas maka berlaku persamaan Parseval

$\langle u, v \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{c_n(u)}\, c_n(v)$ dan ketaksamaan Bessel dapat digantikan dengan persamaan Parseval khusus $\|u\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle u_n, u \rangle|^2$.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard. *Aljabar Linear Elementer*. Erlangga, Jakarta. (1987).

Kumar, Nimit. *Learning in Hilbert Spaces.* Departement of Electrical Engineering at Indian Institute of Technology, Kanpur. (2004).

Kreyszig, Erwin. *Introductory Functional Analysis With Applications*. John Wiley & Sons, New York. (1978).

Steven, Leon J. *Aljabar Linear dan Aplikasinya*. Erlangga, Jakarta. (2001).

Zeidler, Eberhard. *Applied Functional Analysis, Application to Mathematical Physics*. Springer-Verlag. (1995).