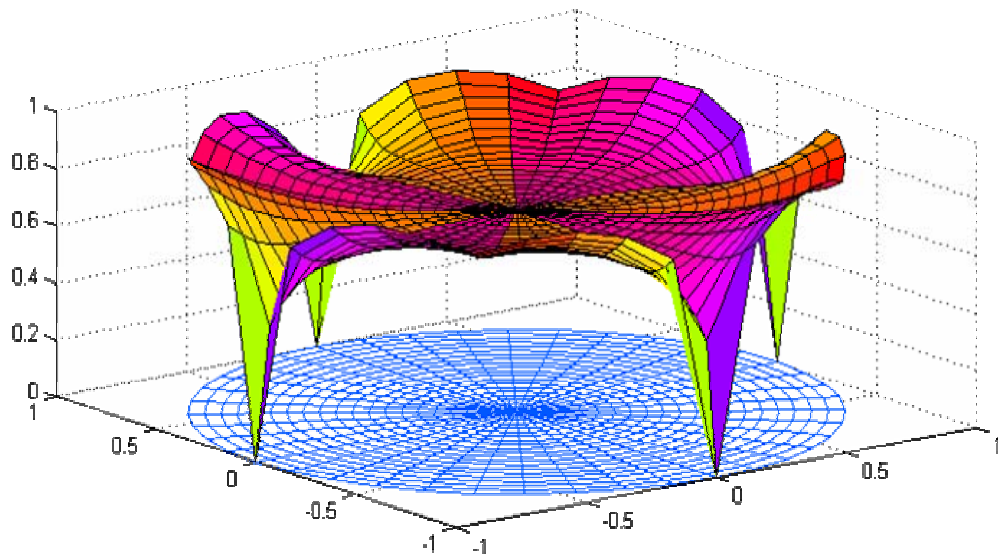


**3** arekeng

**jurnal ilmu matematika dan terapan**

**ISSN: 1978-7227**



## SIFAT-SIFAT INTEGRAL RIEMANN-STIELTJES

(Properties Of Riemann-Stieltjes Integral)

FRANCIS Y RUMLOWANG<sup>1</sup>, HARIMANUS BATKUNDE<sup>2</sup><sup>1</sup> Staf Jurusan Matematika, FMIPA, UNPATTI<sup>2</sup> Calon Staf Jurusan Matematika, FMIPA, UNPATTI

Jl. Ir. M. Putuhenam, Kampus Unpatti, Poka-Ambon

E~Mail: ocat\_08@yahoo.com

## ABSTRACT

If  $f : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$  is limited and  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$  Monotone increase in  $[a, b]$ , is Riemann-Stieltjes integral able to  $\alpha$  on  $[a, b]$  simply written by  $f \in RS[\alpha]$  if  $I = J$ .

With  $I = \int_a^b f(x) d\alpha(x)$  is called Riemann Stieltjes lower integral  $f$  to  $\alpha$  and

$J = \int_a^b f(x) d\alpha(x)$  is called Riemann Stieltjes upper integral  $f$  to  $\alpha$ . Then

$I = J = \int_a^b f(x) d\alpha(x)$  is called Riemann Stieltjes upper integral  $f$  to  $\alpha$  on  $[a, b]$ . if  $f$

and  $g$  is Riemann Stieltjes integralable, and,  $k \in \mathfrak{R}$  then  $f + g$ ,  $kf$ , and  $fg$  is also Riemann Stieltjes integralable. But if  $f$  and  $\alpha$  have united discontinue point then  $f$  is not Riemann Stieltjes integralable on  $\alpha$

**Keywords:** Riemann-Stieltjes, Riemann-Stieltjes Integral

## PENDAHULUAN

Salah satu konsep dasar dalam matematika analisis adalah integral atau antiturunan atau antiderivatif. Ide integral sebenarnya telah muncul pada zaman Archimedes. Tetapi jika dikatakan Teori integral, maka pertama kali ditemukan pada pertengahan abad ke-19. Teori integral klasik pertama kali diperkenalkan oleh Cauchy dan Riemann.

Pada Tahun 1584 George F. Bernard Riemann memberikan syarat-syarat perlu dan cukup dari sebuah fungsi terbatas sehingga menjadi terintegralkan. Saat ini, sebuah fungsi demikian dikenal sebagai fungsi yang terintegral Riemann, dan sebagian besar mahasiswa yang mengambil kalkulus akan mempelajari bentuk integral Riemann ini. Riemann mendominasi kasus-kasus pengintegralan sampai 1894 ketika seorang berkebangsaan Belanda bernama Thomas Joannes Stieltjes mengembangkan Integral Riemann-Stieltjes. T. J. Stieltjes mengembangkan tipe integral ini ketika menyelidiki sebuah masalah khusus yang di fokuskan pada massa balok yang terdistribusi *nonuniform* (tidak seragam). Masalah khusus ini disebut pengembangan dari perluasan pertama Integral Riemann.

Dengan demikian dikatakan bahwa Integral Riemann Stieltjes ini merupakan generalisasi dari integral Riemann. Nama Integral Riemann Stieltjes ini diambil dari nama penemunya yaitu Thomas Joannes Stieltjes yang mengembangkan integral Riemann. Pada umumnya teori yang sering diajarkan adalah Integral Riemann, padahal integral Riemann hanyalah merupakan bentuk khusus dari integral Riemann Stieltjes.

## TINJAUAN PUSTAKA

Kalkulus berhasil ditemukan sekitar tahun 1670, dan tokoh-tokoh matematika yang berperan dalam penemuan Kalkulus adalah Newton dan Leibniz (Gordon, R, A, 1994). Kedua tokoh ini berhasil mengembangkan teorema fundamental, yaitu mengenai antiderivatif. Kemudian A. Cauchy (1789-1857) mulai mengembangkan teori tersebut, dan berhasil meneliti tentang integral dari fungsi kontinu (Jain, P. K. and Gupta, V. P, 1986). Pada tahun 1584, Bernhard Riemann mulai memperhalus definisi yang digunakan oleh Cauchy, dan Riemann pun mengadakan penelitian tentang integral fungsi diskontinu (Royden, H, L, 1989). Dari penelitian tersebut Riemann berhasil menemukan suatu metode khusus dari integral yang sangat sederhana untuk didefinisikan, sehingga metode integral itu disebut Integral Riemann (Soeparna, 2006). Kemudian pada tahun 1875 Darboux berhasil memodifikasi Integral Riemann dengan mendefinisikan integral atas dan integral bawah sehingga terdefinisi suatu integral baru yang ekuivalen dengan Integral Riemann. Konsep umlah Riemann dan jumlah Darboux pada dasarnya adalah sama (Muslich, 2005). Meskipun ada beberapa jenis teori integral tetapi Riemannlah yang banyak memberi inspirasi pembentukan integral lain dan sudah banyak pemakaiannya di bidang matematika maupun di bidang lainnya.

Sementara integral Riemann-Stieltjes yang merupakan perluasan integral Riemann pertama kali diperkenalkan oleh Thomas Joannes Stieltjes.

Sifat-sifat yang berlaku pada integral Riemann Stieltjes akan berlaku juga pada Integral Riemann setelah dilakukan pengkhususan.

Perbedaan besar antara Integral Riemann dan Integral Riemann Stieltjes sendiri terletak pada bentuk fungsi turunannya. Misalkan pada Integral Riemann Stieltjes

bentuk umum fungsi yaitu  $\int_a^b f(x) d\alpha(x)$  maka Integral

Riemann memiliki bentuk umum  $\int_a^b f(x) dx$ , sehingga

terlihat jelas bahwa Integral Riemann Stieltjes akan sama dengan Integral Riemann jika  $\alpha(x) = x$

**Definisi 1** (Kekontinuan fungsi di titik  $a$ )

Fungsi  $f$  dikatakan kontinu di titik  $a$  jika dan hanya jika ketiga syarat berikut terpenuhi :

1.  $f(a)$  ada
2.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  ada
3.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Jika salah satu syarat dari ketiga syarat di atas tidak terpenuhi maka fungsi  $f$  dikatakan tidak kontinu di titik  $a$

**Definisi 2** (Kekontinuan fungsi di pada suatu selang)

Suatu fungsi dikatakan kontinu pada suatu selang terbuka jika dan hanya jika fungsi tersebut kontinu di setiap titik pada selang terbuka tersebut.

**Definisi 3** (Fungsi kontinu di selang tertutup)

Suatu fungsi  $f$  yang daerah asalnya memuat selang tertutup  $[a, b]$  dikatakan kontinu pada  $[a, b]$  jika dan hanya jika fungsi tersebut kontinu pada selang terbuka  $(a, b)$  dan juga kontinu kanan di  $a$  dan kontinu kiri di  $b$

**Definisi 4** (fungsi kontinu seragam)

Fungsi  $f : D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dikatakan kontinu seragam (*uniformly continuous*) pada himpunan  $S \subset D_f$  jika untuk setiap bilangan  $\epsilon > 0$  terdapat bilangan  $\delta > 0$  yang tak bergantung pada titik  $x \in S$  sehingga untuk setiap  $y \in N_\delta(x) \cap S$  (untuk setiap  $x, y \in D_f$  dan  $|x - y| < \delta$ ) berakibat

**Teorema 1**

- (i). Jika  $a \geq b$  dan  $c \geq 0$ , maka  $ca \geq cb$
- (ii). Jika  $a \geq b$  dan  $c \leq 0$ , maka  $ca \leq cb$

**Bukti :**

- (i). Jika  $a \geq b$  berarti  $a - b \in P \cup \{0\}$ . Jika  $c \geq 0$  maka  $c \in P \cup \{0\}$  Sehingga  $c(a - b) \in P \cup \{0\}$  atau  $ca - cb \in P \cup \{0\}$  yang berarti  $ca \geq cb$ . ■

- (ii). Jika  $a \geq b$  berarti  $a - b \in P \cup \{0\}$ . Jika  $c \leq 0$  maka  $-c \geq 0$  maka  $-c \in P \cup \{0\}$  Sehingga  $(-c)(a - b) \in P \cup \{0\}$  atau  $cb - ca \in P \cup \{0\}$  yang berarti  $ca \leq cb$  ■

**Supremum dan Infimum**

Berikut ini akan diberikan pengertian dasar tentang batas atas dan batas bawah, serta supremum (batas atas terkecil) dan infimum (batas bawah terbesar). Misal sembarang  $A \subset \mathbb{R}$  dikatakan terbatas ke atas jika terdapat suatu bilangan  $N \in \mathbb{R}$  sedemikian sehingga  $x \leq N$ , untuk setiap  $x \in A$ , selanjutnya  $N$  disebut batas atas untuk  $A$ , dan  $A \subset \mathbb{R}$  dikatakan terbatas ke bawah jika terdapat suatu bilangan  $M \in \mathbb{R}$  sedemikian sehingga  $M \leq x$ , untuk setiap  $x \in A$ , selanjutnya  $M$  disebut batas bawah untuk  $A$ . Berdasarkan pengertian tersebut maka diberikan definisi berikut ini.

**Teorema 2**

Diberikan  $S$  adalah himpunan terbatas di  $\mathbb{R}$  dan  $S_0 \neq \emptyset$  dengan  $S_0 \subset S$  dengan demikian berlaku :

$$\inf S \leq \inf S_0 \leq \sup S_0 \leq \sup S$$

**Bukti :**

$S$  adalah himpunan terbatas, dengan demikian,  $S$  memiliki infimum dan supremum.

Karena  $S_0 \subset S$  maka  $S_0$  juga terbatas dan memiliki infimum serta supremum

Misalkan  $m$  adalah infimum untuk  $S$  maka :

- (i).  $m$  batas bawah untuk  $S$ .
- (ii). Tidak ada bilangan lebih kecil dari  $m$  yang merupakan batas bawah untuk  $S$ .

Misalkan  $l$  adalah infimum  $S_0$  maka

- (i).  $l$  batas bawah untuk  $S_0$ .
- (ii). Tidak ada bilangan lebih kecil dari  $l$  yang merupakan batas bawah untuk  $S_0$ .

Karena  $S_0 \subset S$  maka

$$m \leq l \text{ atau } \inf S \leq \inf S_0 \tag{1}$$

Misalkan  $M$  adalah supremum untuk  $S$  maka :

- (i).  $M$  batas atas untuk  $S$ .
- (ii). Tidak ada bilangan lebih besar dari  $M$  yang merupakan batas atas untuk  $S$ .

Misalkan  $L$  adalah supremum  $S_0$  maka

- (i).  $L$  batas atas untuk  $S_0$ .
- (ii). Tidak ada bilangan lebih besar dari  $L$  yang merupakan batas atas untuk  $S_0$ .

Karena  $S_0 \subset S$

$$\text{maka } L \leq M \text{ atau } \sup S_0 \leq \sup S \tag{2}$$

Dari (1) dan (2) diperoleh  $\inf S \leq \inf S_0 \leq \sup S_0 \leq \sup S$  ■

**Integral Riemann**

Pada bagian ini akan dijabarkan secara singkat mengenai Integral Riemann, karena integral Riemann-stieltjes yang akan dibahas merupakan keadaan umum

dari integral Riemann. Dengan demikian sangat penting untuk dikaji kembali tentang partisi dan integral Riemann untuk mendukung dan memperjelas pembahasan selanjutnya.

Jika  $a, b \in \mathfrak{R}$  dengan  $a < b$  maka terdapat bilangan riil  $x_1$  sehingga  $a < x_1 < b$ . karena  $x_1 < b$  tentu terdapat bilangan riil  $x_2$  sehingga memenuhi  $x_1 < x_2 < b$ . proses ini jika diteruskan akan diperoleh bilangan-bilangan  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sehingga  $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$

Jadi untuk setiap  $[a, b]$  dapat dibentuk himpunan  $D = \{a = x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$  dengan  $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$

### HASIL DAN PEMBAHASAN

#### 1. Integral Riemann Stieltjes

Diberikan fungsi  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$  naik monoton pada  $[a, b]$  dan terbatas pada  $[a, b]$ . Untuk setiap partisi  $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$  pada  $[a, b]$  didefinisikan:

$$\Delta_i \alpha = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Diberikan fungsi  $f : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$ , kemudian didefinisikan:

$$m = \inf \{f(x) : x \in [a, b]\} \text{ dan}$$

$$M = \sup \{f(x) : x \in [a, b]\}$$

$$m_i = \inf \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \text{ dan}$$

$$M_i = \sup \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Perlu diperhatikan bahwa jika  $f$  terbatas ke bawah pada  $[a, b]$  maka  $m$  dan  $m_i$  ada, demikian pula jika fungsi  $f$  terbatas ke atas pada  $[a, b]$  maka  $M$  dan  $M_i$  ada. Selanjutnya dibentuk jumlahan-jumlahan sebagai berikut.

$$L(f, P, \alpha) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta_i \alpha,$$

$$U(f, P, \alpha) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta_i \alpha,$$

$$S(f, P, \alpha) = \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta_i \alpha,$$

dengan  $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$  untuk setiap  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  notasi  $L(f, P, \alpha)$  disebut jumlah Riemann Stieltjes bawah,  $U(f, P, \alpha)$  disebut jumlah Riemann Stieltjes atas, dan  $S(f, P, \alpha)$  disebut jumlah Riemann Stieltjes fungsi  $f$  pada  $[a, b]$  terhadap partisi  $P$ . Karena selalu

berlaku :  $m_i \leq f(x_i^*) \leq M_i$ , untuk setiap  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  diperoleh teorema sebagai berikut :

#### Teorema 2

Diberikan fungsi  $f : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$  dan  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$  naik monoton pada  $[a, b]$ . Jika  $P$  partisi pada  $[a, b]$  maka berlaku

$$L(f, P, \alpha) \leq S(f, P, \alpha) \leq U(f, P, \alpha)$$

Khususnya jika  $f$  terbatas pada  $[a, b]$  yaitu  $m \leq f(x) \leq M$  untuk setiap  $x \in [a, b]$  maka berlaku

$$m(\alpha(b) - \alpha(a)) \leq L(f, P, \alpha) \leq S(f, P, \alpha) \leq U(f, P, \alpha) \leq M(\alpha(b) - \alpha(a))$$

#### Bukti :

Misalkan  $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$  partisi pada  $[a, b]$  dan  $m_i = \inf \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$  dan  $M_i = \sup \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$  untuk setiap  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  maka berlaku

$$m_i \leq f(x_i^*) \leq M_i$$

Sehingga dapat ditulis

$$m_1 + m_2 + \dots + m_n \leq f(x_1^*) + f(x_2^*) + \dots + f(x_n^*) \text{ atau} \leq M_1 + M_2 + \dots + M_n$$

$\sum_{i=1}^n m_i \leq \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \leq \sum_{i=1}^n M_i$  dan jika dikalikan  $\Delta_i \alpha$  pada tiap ruas dengan  $\Delta_i \alpha > 0$

Diperoleh

$$\sum_{i=1}^n m_i \Delta_i \alpha \leq \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta_i \alpha \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta_i \alpha$$

yang sama artinya dengan

$$L(f, P, \alpha) \leq S(f, P, \alpha) \leq U(f, P, \alpha)$$

Dengan memperhatikan pertidaksamaan  $m \leq m_i \leq f(x_i^*) \leq M_i \leq M$  maka diperoleh

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n m \Delta_i \alpha \leq \sum_{i=1}^n m_i \Delta_i \alpha \leq \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta_i \alpha \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta_i \alpha \leq \sum_{i=1}^n M \Delta_i \alpha$$

$$\Leftrightarrow m((\alpha(x_1) - \alpha(x_0)) + (\alpha(x_2) - \alpha(x_1)) + \dots + (\alpha(x_n) - \alpha(x_{n-1}))) \leq \sum_{i=1}^n m_i \Delta_i \alpha \leq \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta_i \alpha \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta_i \alpha \leq M$$

$$\sum_{i=1}^n M_i \Delta_i \alpha \leq M$$

$$((\alpha(x_1) - \alpha(x_0)) + (\alpha(x_2) - \alpha(x_1)) + \dots + (\alpha(x_n) - \alpha(x_{n-1})))$$

$$\Leftrightarrow m(\alpha(x_n) - \alpha(x_0)) \leq \sum_{i=1}^n m_i \Delta_i \alpha$$

$$\leq \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta_i \alpha \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta_i \alpha \leq M(\alpha(x_n) - \alpha(x_0))$$

$$\Leftrightarrow m(\alpha(b) - \alpha(a)) \leq L(f, P, \alpha)$$

$$\leq S(f, P, \alpha) \leq U(f, P, \alpha) \leq M(\alpha(b) - \alpha(a))$$

**Teorema 3**

Diberikan fungsi  $f : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$  dan  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$  naik monoton pada  $[a, b]$ . Jika  $P_1$  dan  $P_2$  masing-masing partisi pada  $[a, b]$  dan  $P_1 \subset P_2$  maka

$$L(f, P_1, \alpha) \leq L(f, P_2, \alpha) \leq U(f, P_2, \alpha) \leq U(f, P_1, \alpha)$$

**Bukti :**

Dibentuk jumlah Rieman Stieltjes atas dan jumlah Rieman Stieltjes bawah untuk tiap partisi  $P_1$  dan  $P_2$  pada  $[a, b]$  dengan  $P_1 \subset P_2$

$$L(f, P_1, \alpha) = \sum_{i=1}^n m_{i1} \Delta_i \alpha,$$

$$L(f, P_2, \alpha) = \sum_{i=1}^n m_{i2} \Delta_i \alpha,$$

$$U(f, P_1, \alpha) = \sum_{i=1}^n M_{i1} \Delta_i \alpha,$$

$$U(f, P_2, \alpha) = \sum_{i=1}^n M_{i2} \Delta_i \alpha,$$

Dimana

$$m_{i1} = \inf \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i] \subset P_1\} \text{ dan}$$

$$M_{i1} = \sup \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i] \subset P_1\}$$

$$m_{i2} = \inf \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i] \subset P_2\} \text{ dan}$$

$$M_{i2} = \sup \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i] \subset P_2\}$$

Seperti diketahui bahwa  $P_1 \subset P_2$  maka partisi  $P_1$  akan termuat dalam  $P_2$  sehingga

$$\sum_{i=1}^n m_{i1} \Delta_i \alpha \leq \sum_{i=1}^n m_{i2} \Delta_i \alpha \leq \sum_{i=1}^n M_{i2} \Delta_i \alpha \leq \sum_{i=1}^n M_{i1} \Delta_i \alpha$$

atau

$$L(f, P_1, \alpha) \leq L(f, P_2, \alpha) \leq U(f, P_2, \alpha) \leq U(f, P_1, \alpha)$$

**Definisi 5**

Jika fungsi  $f : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$  terbatas dan  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$  naik monoton pada  $[a, b]$  maka:

- i). Batas atas terkecil (bat)  $\underline{L}(f, \alpha)$  atau  $\sup \{L(f, P, \alpha) : P \in \pi[a, b]\}$  ditulis singkat

dengan  $I = \int_a^b f(x) d\alpha(x)$  disebut integral

bawah Riemann Stieltjes fungsi  $f$  terhadap  $\alpha$

- ii). Batas bawah terbesar (bbt)  $\underline{U}(f, \alpha)$  atau  $\inf \{U(f, P, \alpha) : P \in \pi[a, b]\}$  ditulis singkat

dengan  $J = \int_a^b f(x) d\alpha(x)$  disebut integral

atas Riemann Stieltjes fungsi  $f$  terhadap  $\alpha$

**2. Syarat Fungsi Terintegral Riemann Stieltjes****Definisi 6**

Jika fungsi  $f : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$  terbatas dan  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$  naik monoton pada  $[a, b]$ , dikatakan terintegral Riemann-Stieltjes terhadap  $\alpha$  pada  $[a, b]$  ditulis singkat dengan  $f \in RS[\alpha]$  jika  $I = J$

Selanjutnya nilai  $I = J = \int_a^b f(x) d\alpha(x)$  disebut

Integral Riemann Stieltjes fungsi  $f$  terhadap  $\alpha$  pada  $[a, b]$  cukup ditulis  $RS[\alpha]$ . Jika diambil  $\alpha[x] = x$  maka Integral Riemann merupakan kejadian khusus dari Integral Riemann Stieltjes.

**Sifat-sifat Dasar Integral Riemann Stieltjes****Teorema 4 (Sifat Linear)**

Jika  $f$  dan  $g \in RS(\alpha)$  pada  $[a, b]$  dan  $k$  bilangan riil maka  $kf \in RS(\alpha)$  dan  $f + g \in RS(\alpha)$  pada  $[a, b]$ , dan berlaku

$$(i). \int_a^b kf d\alpha = k \int_a^b f d\alpha$$

$$(ii). \int_a^b (f + g) d\alpha(x) = \int_a^b f d\alpha + \int_a^b g d\alpha$$

**Bukti :**

Diberikan sembarang  $\varepsilon > 0$ . Karena  $f, g \in RS(\alpha)$  pada  $[a, b]$  maka terdapat partisi  $P_1$  dan  $P_2$  pada  $[a, b]$  sehingga

$$U(f, P_1, \alpha) - L(f, P_1, \alpha) < \frac{\varepsilon}{2(|k|+1)} \text{ dan}$$

$$U(g, P_2, \alpha) - L(g, P_2, \alpha) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ambil  $P = P_1 \cup P_2$  maka  $P$  merupakan partisi penghalus  $P_i, i=1, 2$  pada  $[a, b]$  sehingga berlaku

$$L(f, P_1, \alpha) \leq L(f, P, \alpha) \leq U(f, P, \alpha) \leq U(f, P_1, \alpha)$$

$$L(f, P_2, \alpha) \leq L(f, P, \alpha) \leq U(f, P, \alpha) \leq U(f, P_2, \alpha)$$

Oleh karena itu diperoleh

$$(i). U(kf, P) - L(kf, P) \leq U(kf, P_1) - L(kf, P_1) \leq |k|(U(f, P_1) - L(f, P_1))$$

$$< |k| \frac{\varepsilon}{2(|k|+1)} < \varepsilon$$

Terbukti bahwa  $kf \in RS(\alpha)$  pada  $[a, b]$  dan berlaku

$$\begin{aligned} \int_a^b kf \, d\alpha &= \sup\{L(kf, P, \alpha) : P \in \pi[a, b]\} \\ &= k \cdot \sup\{L(f, P, \alpha) : P \in \pi[a, b]\} \\ &= k \cdot \int_a^b f \, d\alpha \quad \text{jika } k > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_a^b kf \, d\alpha &= \sup\{L(kf, P, \alpha) : P \in \pi[a, b]\} \\ &= k \cdot \inf\{U(f, P, \alpha) : P \in \pi[a, b]\} \\ &= k \cdot \int_a^b f \, d\alpha \quad \text{jika } k < 0 \end{aligned}$$

(ii).  $U(f + g, P, \alpha) - L(f + g, P, \alpha) = U(f, P, \alpha) + U(g, P, \alpha) - (L(f, P, \alpha) + L(g, P, \alpha))$   
 $= U(f, P, \alpha) - L(f, P, \alpha) + U(g, P, \alpha) - L(g, P, \alpha)$   
 $\leq U(f, P_1, \alpha) - L(f, P_1, \alpha) + U(g, P_1, \alpha) - L(g, P_1, \alpha)$   
 $< \frac{\varepsilon}{s(k+1)} + \frac{\varepsilon}{2}$   
 $< \varepsilon$

Terbukti bahwa  $f + g \in RS(\alpha)$  pada  $[a, b]$  dan berlaku

$$\begin{aligned} \int_a^b (f + g) \, d\alpha &= \sup\{L(f + g, P, \alpha) : P \in \pi[a, b]\} \\ &= \sup\{L(f, P, \alpha) : P \in \pi[a, b]\} \\ &\quad + \sup\{L(g, P, \alpha) : P \in \pi[a, b]\} \\ &= \int_a^b f \, d\alpha + \int_a^b g \, d\alpha \end{aligned}$$

**4. Penghitungan Integral Riemann-Stieltjes**

**Teorema 5 (Penghitungan Integral Riemann-Stieltjes)**

Diasumsikan  $\alpha$  naik monoton pada  $[a, b]$  dan  $\alpha' \in R[a, b]$  dan  $f : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$  terbatas. Fungsi  $f \in RS(\alpha)$  pada  $[a, b]$  jika dan hanya jika  $f\alpha' \in R[a, b]$

**Bukti :**

Diketahui  $\alpha' \in R[a, b]$  maka untuk setiap  $\varepsilon > 0$  terdapat partisi  $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$  pada  $[a, b]$  dan berakibat  $U(\alpha', P) - L(\alpha', P) < \varepsilon$

Menurut teorema nilai rata-rata maka dapat dipilih  $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$  sehingga

$$\Delta_i \alpha = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) = \alpha'(t_i) \Delta_i x$$

Misalkan  $m_i^* = \inf\{\alpha'(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$  dan  $M_i^* = \sup\{\alpha'(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$  maka untuk setiap  $s_i^*, t_i \in [x_{i-1}, x_i]$  berlaku

$$m_i^* \leq \alpha'(s_i^*) \leq M_i^* \quad \text{dan} \quad m_i^* \leq \alpha'(t_i) \leq M_i^*$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\alpha'(s_i^*) - \alpha'(t_i)| \Delta_i x &\leq \sum_{i=1}^n (M_i^* - m_i^*) \Delta_i x \\ &= U(\alpha', P) - L(\alpha', P) < \varepsilon \end{aligned}$$

Diambil  $M = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$  dan karena

$$\sum_{i=1}^n f(s_i^*) \Delta_i \alpha = \sum_{i=1}^n f(s_i^*) \alpha'(t_i) \Delta_i x$$

Maka diperoleh

$$\begin{aligned} |U(f, P, \alpha) - U(f\alpha', P)| &= \left| \sum_{i=1}^n f(s_i^*) \Delta_i \alpha - \sum_{i=1}^n f(s_i^*) \alpha'(s_i^*) \Delta_i x \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n f(s_i^*) (\Delta_i \alpha - \alpha'(s_i^*) \Delta_i x) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n f(s_i^*) (\alpha'(t_i) \Delta_i x - \alpha'(s_i^*) \Delta_i x) \right| \\ &\leq M \sum_{i=1}^n |\alpha'(s_i^*) - \alpha'(t_i)| \Delta_i x \\ &< M\varepsilon \end{aligned}$$

Sehingga  $U(f, P, \alpha) \leq U(f\alpha', P) + M\varepsilon$

Dan berakibat  $\int_a^b f \, d\alpha \leq \int_a^b f \alpha' \, dx + M\varepsilon$

Dan berlaku untuk setiap  $\varepsilon > 0$  maka

$$\int_a^b f \, d\alpha = \int_a^b f \alpha' \, dx$$

Demikian juga berlaku  $\int_a^b f \, d\alpha \leq \int_a^b f \alpha' \, dx + M\varepsilon$

Karena berlaku untuk setiap  $\varepsilon > 0$  maka

$$\int_a^b f \, d\alpha = \int_a^b f \alpha' \, dx$$

Dari (1) dan (2) maka  $\int_a^b f \, d\alpha = \int_a^b f \alpha' \, dx$  yaitu

$f \in RS(\alpha)$  pada  $[a, b]$  jika dan hanya jika  $f\alpha' \in R[a, b]$  ■

**Teorema 6 (Integral Parsial Riemann-Stieltjes)**

Diberikan  $F, G : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$  yang berturut-turut mempunyai turunan pada  $[a, b]$ . Jika  $F' = f \in R[a, b]$  dan  $G' = g \in R[a, b]$  maka:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)g(x)dx$$

**Bukti :**

Didefinisikan fungsi  $H(x) = F(x)G(x)$ , karena  $F$  dan  $G$  mempunyai turunan, maka :

- i. dan  $G$  kontinu pada  $[a, b]$  sehingga  $F, G \in R[a, b]$ , dan
- ii. mempunyai turunan pada  $[a, b]$  dengan  $H' = FG' + F'G = Fg + fG$

Menurut teorema fundamental kalkulus berakibat

$$\begin{aligned} \int_a^b (F(x)g(x) + f(x)G(x))dx &= H(b) - H(a) \\ &= F(b)G(b) - F(a)G(a) \end{aligned}$$

Berakibat

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x)dx$$

Dengan demikian teorema terbukti. ■

**KESIMPULAN**

Berdasarkan pembahasan maka kesimpulan dalam penelitian ini adalah:

1. Integral Riemann Stieltjes adalah perluasan dari integral Riemann, dimana Integral Riemann merupakan pengkhususan dari integral Riemann Stieltjes.
2. Fungsi  $f$  terintegral Riemann Stieltjes pada  $\alpha$  jika  $f : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$  dan  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$  naik monoton pada  $[a, b]$  dan fungsi  $f$  kontinu.
3. Jika fungsi  $f$  dan  $g$  terintegral Riemann Stieltjes, dan  $k \in \mathfrak{R}$  maka fungsi  $f + g$ ,  $kf$  dan  $fg$  terintegral Riemann Stieltjes.
4. Jika fungsi  $f$  dan  $\alpha$  memiliki titik diskontinu berserikat maka  $f$  tidak terintegral Riemann Stieltjes terhadap  $\alpha$

**DAFTAR PUSTAKA**

- Bartle, R. G., (1994), *Introduction to Real Analysis*, John Wiley & Sons, USA
- Gordon, R. A., (1994), *The Integrals Of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, *Graduate Studies In Mathematics 4*, Volume 4., American Mathematical Society, USA.
- Hutahaean, E., (1989), *Analisis Real II*, Penerbit Karunika, Universitas Terbuka, Jakarta.

Hutahaean, Leithold., (1986), *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik*, edisi kelima jilid 1. Erlangga, Jakarta.

Jain, P. K. and Gupta, V. P., (1986), *Lebesgue Measure and Integration*. Wiley Eastern Limited, New Delhi.

Muslich., (2005), *Analisis Real II*, Lembaga Pengembangan Pendidikan, Surakarta.

Purcell, Edwin J, Varberg, Rigdon., (2003). *Kalkulus*, edisi kedelapan jilid 1. Erlangga, Jakarta.

Royden, H. L., (1989), *Real Analysis*, Third Edition, Macmillan Publishing Company, New York.

Soeparna, D., (2006), *Pengantar Analisis Real*, Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.

Soeparna, D., (2006), *Herentia (x) G(x) Analisis Abstrak*, Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.

Soemantri, R., (1988), *Analisis Real I*, Karunia, Jakarta.