PROSIDING

SEMINAR NASIONAL PENDIDIKAN MATEMATIKA

"Pengembangan Penelitian Pendidikan Matematika untuk Mendukung Peningkatan kualitas Pembelajaran Matematika"

Sabtu, 20 Agustus 2016
Student Centre FKIP
UNIVERSITAS PATTIMURA AMBON

ISBN 978-602-99868-3-9

PROSIDING

SEMINAR NASIONAL PENDIDIKAN MATEMATIKA

"Pengembangan Penelitian Pendidikan Matematika Untuk Mendukung Peningkatan Kualitas Pembelajaran Matematika"

Sabtu, 20 Agustus 2016
Student Centre FKIP Universitas Pattimura Ambon

ISBN 978-602-99868-3-9

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS PATTIMURA
AMBON
2016

PROSIDING
SEMINAR NASIONAL PENDIDIKAN MATEMATIKA TAHUN 2016

"Pengembangan Penelitian Pendidikan Matematika Untuk Mendukung Peningkatan Kualitas Pembelajaran Matematika"

Penanggung Jawab :

Ketua Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Unpatti

Prof. Dr. W. Mataheru, M.Pd

Ketua : Dr. C. S. Ayal, M.Pd

Sekretaris : N.C. Huwaa, S.Pd., M.Sc

Bendahara. Ch. Matitaputy, S.Pd., M.Pd

Editor :

F. Sapulete, S.Pd., M.Pd

Yohanis M. Apituley, S.Pd

Reviewer :

Prof. Dr. T. G. Ratumanan, M.Pd

Prof. Dr. Th. Laurens, M.Pd

Desain Layout Sampul : Y.M. Apituley, S.Pd

Penerbit :

Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Unpatti

Ambon (Poka) Jl. Ir. M. Putuhena
Gedung Jurusan Pendidikan MIPA

ISBN 978-602-99868-3-9

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa, karena atas rahmatNya Prosiding Seminar Nasional Pendidikan Matematika 2016 dapat diterbitkan. Prosiding ini merupakan kumpulan dari artikel ilmiah yang disajikan dalam Seminar Nasional Pendidikan Matematika FKIP Universitas Pattimura dengan Tema "Pengembangan Penelitian Pendidikan Matematika Untuk Mendukung Peningkatan Kualitas Pembelajaran Matematika."

Seminar ini diselenggarakan pada tanggal 20 Agustus 2016 oleh Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Unpatti. Ini merupakan kegiatan rutin yang akan terus dilaksana pada tahun-tahun mendatang. Semoga dengan kegiatan ini Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Unpatti dapat terus berkiprah dalam menghimpun temuan-temuan baru yang berkaitan dengan pengembangan Program Studi, serta sekaligus sebagai wahana komunikasi antara akademisi, guru, peneliti, dan pemerhati pendidikan pada umumnya.

Semoga semua yang telah diupayakan dalam seminar sampai tercetaknya prosiding ini membawa manfaat bagi dunia pendidikan dan masyarakat luas pada umumnya.

Pada kesempatan ini tak lupa kami ucapkan terima kasih kepada Ketua Jurusan Pendidikan MIPA FKIP Unpatti, Dekan FKIP Unpatti, Rektor Unpatti, serta para penyandang dana yang telah mendukung secara penuh pelaksanaan kegiatan Seminar Nasional Pendidikan Matematika hingga terselesaikannya prosiding ini.

Ambon, 20 Agustus 2016

Ketua Panitia

Dr. C. S Ayal, S.Pd., M.Pd

SAMBUTAN DEKAN FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN UNIVERSITAS PATTIMURA PADA SEMINAR NASIONAL PENDIDIKAN MATEMATIKA

Assalam Walaikum Warahmatulahi Wabarakatu, dan Salam Sejahtera untuk kita semua.

Yang terhormat:

1. Rektor Universitas Pattimura, dalam hal ini diwakili oleh Pembantu Rektor Bidang Kerjasama Bapak Prof. Ir..J. Mosse, PH.D

Yang saya hormati,

2. Pembantu-pembantu Dekan pada lingkup FKIP
3. Bapak Prof. Dr. Usman Mulbar, M.Pd. Selamat datang di Universitas Pattimura Ambon.
4. Bapak Prof. Dr. T.G. Ratumanan, M.Pd.
5. Bapak Dr. Rully Charitas Indra Pramana, M.Pd. Selamat datang di Universitas Pattimura Ambon.
6. Ketua Jurusan Pendidikan MIPA, Bapak Dr. Stev Huliselan, M.Si
7. Para Ketua Program Studi pada lingkup FKIP
8. Staf Dosen pada program studi pendidikan matematika, program studi pendidikan ekonomi, PPKN dan Jurusan Matematika UNPATTI
9. Bapak, Ibu guru peserta Seminar Nasional dan Kontes Literasi Matematika yang berasal dari Pulau Ambon dan Kabupaten Seram Bagian Barat
10. Para Mahasiswa program studi pendidikan matematika

Dan Siswa-siswi peserta lomba Kontes Literasi Matematika di kota Ambon.

Selaku orang yang percaya patutlah kita naikan Puji dan syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa karena atas berkat dan RahmatNYA, sehingga kegiatan Seminar Nasional dan Kontes Literasi Matematika (KLM) dapat dilaksanakan pada hari ini Sabtu 20 Agustus 2016. Adapun tema pada kegiatan Seminar ini adalah “Pengembangan Penelitian Pendidikan Matematika Untuk Mendukung Peningkatan Kualitas Pembelajaran Matematika”, dan tema pada kegiatan Kontes Literasi Matematika adalah : “Membentuk Siswa yang Kreatif dan Inovaif “

Seminar Nasional Pendidikan Matematika Tahun 2016 ini diharapkan menjadi wahana interaksi dan pertukaran informasi dari hasil penelitian maupun pengalaman serta gagasan di bidang matematika maupun pembelajarannya dalam semangat saling asah, asih dan asuh untuk menyikapi tantangan masa depan Maluku yang berdaya saing dengan provinsi lainnya di Indonesia.

Saya memberikan apresiasi dan penghargaan bagi program studi pendidikan matematika FKIP Universitas Pattimura yang telah menjadikan Seminar Nasional Pendidikan Matematika sebagai agenda rutin tahunan dan menjadi bagian dari kegiatan akademik program studi dan Kontes Literasi Matematika (KLM) yang di ikuti siswa SMP kota Ambon . Saya berharap seminar nasional pendidikan matematika ini dapat menjadi salah satu media informasi penyampaian hasil-hasil penelitian dan pikiran-pikiran kritis bagi para guru dan calon guru matematika. Semoga seminar ini juga membahas berbagai perkembangan terkini dalam bidang pendidikan secara umum dan pendidikan matematika secara khususnya. Saya berharap para peserta, terutama para guru dan calon guru dapat memanfaatkan seminar ini sebaik mungkin sebagai sarana belajar dan tukar menukar informasi. Melalui seminar ini diharapkan ada kontribusi bagi perbaikan kualitas pembelajaran matematika yang pada akhirnya akan berdampak pada peningkatan kualitas hasil belajar peserta didik.

Mengakhiri sambutan ini, saya menyampaikan terima kasih bagi staf dosen program studi pendidikan matematika dan panitia, juga kepada nara sumber. Dan dengan mengucapkan syukur kepada Tuhan yang Maha Pengasih, saya membuka secara resmi seminar nasional pendidikan matematika tahun 2016. Semoga Tuhan memberkati kita sekalian.

Ambon, 20 Agustus 2016
Dekan FKIP Unpatti,

Prof. Dr. Th. Laurens, M.Pd
NIP. 196205171987032003

DAFTAR ISI

IDENTIFIKASI STRUKTUR SEMIALJABAR ATAS HEMIRING

Shergio Jordy Camerling[1], Elvinus Richard Persulessy[2]

[1]*Mahasiswa Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI*
[2]*Staf Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI*
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon, Maluku
E-mail : shergio78@gmail.com

ABSTRAK

Hemiring merupakan suatu himpunan tak kosong yang memenuhi sifat-sifat monoid komutatif terhadap operasi penjumlahan, memenuhi sifat-sifat semigrup terhadap operasi pergandaan dan memenuhi sifat distribusi kiri dan distributif kanan terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan. Himpunan hemiring R disebut semialjabar atas hemiring S jika himpunan R bersifat semimodul kiri dan semimodul kanan (bi-semimodul) atas himpunan S yang memenuhi $(ax)b = a(xb)$ untuk setiap $a, b \in S$ dan $x \in R$.

Kata Kunci : *Hemiring, Semialjabar atas hemiring.*

I. PENDAHULUAN

Struktur aljabar merupakan ilmu yang mempelajari tentang himpunan tak kosong, yang mana suatu himpunan dapat dibentuk menjadi struktur-struktur dalam aljabar dengan didefinisikan satu atau lebih operasi biner dan memenuhi aksioma-aksioma yang berlaku. Struktur-struktur yang paling populer dalam aljabar abstrak ialah grup dan ring. Para ilmuwan matematika telah banyak menemukan dan meneliti struktur-struktur baru pada aljabar abstrak selain grup dan ring yang diantaranya struktur-struktur tersebut ternyata adalah struktur yang hanya diperlemah sifat-sifatnya dari struktur-struktur yang telah ada. Salah satu contoh struktur yang diperlemah sifatnya yaitu semigrup, yang mana semigrup merupakan struktur yang diperlemah sifatnya dari grup yang hanya memenuhi sifat tertutup dan asosiatif terhadap operasi biner yang didefinisikan. Suatu himpunan disebut ring jika himpunan tersebut merupakan grup komutatif terhadap operasi penjumlahan, semigrup terhadap operasi pergandaan, serta kedua operasi penjumlahan dan pergandaannya bersifat distributif kiri dan distributif kanan. Dari sifat-sifat ini dapat diperlemah dan menjadi struktur aljabar yaitu semiring yang merupakan semigrup terhadap kedua operasi binernya dan memenuhi distributif kiri dan distributif kanan. Jika suatu semiring berelemen netral dan bersifat komutatif maka akan membentuk hemiring. Dengan kata lain hemiring merupakan ring dengan tidak meninjau adanya elemen invers terhadap operasi penjumlahan. Selanjutnya dari definisi hemiring dapat diperkenalkan struktur aljabar yang disebut sebagai semialjabar atas hemiring. Hemiring R dikatakan semialjabar atas S, dimana S adalah hemiring, jika R adalah semimodul kiri dan kanan atas S.

II. TINJAUAN PUSTAKA

Hemiring bukanlah suatu struktur baru dalam struktur aljabar, *hemiring* telah diperkenalkan mulai tahun 1978 oleh D.M.Olson. Dalam penelitiannya tentang homomorfisma hemiring ia kemudian menemukan struktur hemiring baru yaitu hemiring semisubtraktif dan hemiring hereditarily semisubtraktif. Yang kemudian berakibat dalam teori homomorfisma yang melahirkan klasifikasi homomorfisma hemiring yaitu *N*-homomorfisma dan homomorfisma maksimal. D.M.Olson memberikan pemahaman mendasar tentang *hemiring* melalui definisi dan bentuk-bentuk *hemiring.*

Bukan hanya itu Sen dan Bandyopadhyay pada tahun 1990 juga turut memperkenalkan tentang hemiring melalui jurnalnya yang berjudul "*Structure Space of a Semialgebra over a Hemiring"*.

Berdasarkan penelitian-penelitian itulah peneliti tertarik untuk menulis tentang hemiring karena peneliti ingin meneliti dan menelaah struktur lain dari *hemiring* yang tampak menarik untuk diteliti, dimana peneliti akan meninjau karakteristik dasar semialjabar atas hemiring.

Definisi 1 Monoid

Diberikan suatu himpunan $M \neq \emptyset$. Himpunan M dikatakan Monoid jika M merupakan semigrup terhadap operasi $"+"$ atau $"\cdot"$ yang memenuhi syarat adanya elemen identitas atau elemen satuan.

Himpunan M dikatakan monoid terhadap operasi $"+"$ jika memenuhi sifat :

i) Tertutup $(\forall a, b \in M)\ a + b \in M$

ii) Asosiatif $(\forall a, b, c \in M)\ a + (b + c) = (a + b) + c$

iii) Terdapat elemen identitas $(\exists 0 \in M)(\forall a \in M), a + 0 = 0 + a = a$

Himpunan M dikatakan monoid terhadap operasi " $\cdot$ " jika memenuhi sifat :

i) Tertutup $(\forall a, b \in M)\ a \cdot b \in M$

ii) Asosiatif $(\forall a, b, c \in M)\ a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

iii) Terdapat elemen satuan $(\exists 1 \in M)(\forall a \in M), a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

Contoh 1

Diberikan himpunan $\mathbb{Q}^+ \cup \{0\} = \left\{\frac{a}{b} \middle| a, b \in \mathbb{Z}, a \geq 0, b \geq 0, b \neq 0\right\}$, yaitu himpunan bilangan rasional tak negatif. Pada $\mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$ didefinisikan operasi " $+$ " dan " $\cdot$ ". Maka $\left(\mathbb{Q}^+ \cup \{0\}, +,\ \cdot\right)$ merupakan monoid terhadap operasi " $+$ " dan " $\cdot$ ".

Definisi 2 Monoid Komutatif

Diberikan suatu Monoid M terhadap operasi " $+$ ". Himpunan M disebut Monoid Komutatif terhadap operasi " $+$ " jika memenuhi sifat :

$$(\forall a, b \in M)\ a + b = b + a$$

Diberikan suatu Monoid M terhadap opersasi " $\cdot$ ". Himpunan M disebut Monoid Komutatif terhadap operasi " $\cdot$ " jika memenuhi sifat :

$$(\forall a, b \in M)\ a \cdot b = b \cdot a$$

Contoh 2

Berdasarkan contoh 1, diberikan himpunan $\mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$ yang merupakan monoid. Maka dapat ditunjukkan bahwa $\mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$ merupakan monoid komutatif terhadap operasi " $+$ " dan monoid komutatif terhadap operasi " $\cdot$ ".

Definisi 3 Ring

Diberikan himpunan $R \neq \emptyset$. Pada himpunan R didefinisikan operasi-operasi " $+$ " dan " $\cdot$ ". Himpunan R disebut Ring terhadap kedua operasi tersebut, jika :

a) Terhadap operasi " $+$ ", himpunan R merupakan grup abelian :

   i) Tertutup $(\forall a, b \in R), a + b \in R$

   ii) Asosiatif $(\forall a, b, c \in R), a + (b + c) = (a + b) + c$

   iii) Terdapat elemen netral $(\exists 0 \in R)(\forall a \in R), a + 0 = 0 + a = a$

   iv) Tiap elemen memiliki invers $(\forall a \in R)(\exists -a \in R),\ a + (-a) = -a + a = 0$

   v) Komutatif $\left(\forall a,\ \text{훔} \in R\right), a + b = b + a$

b) Terhadap operasi " $\cdot$ ", himpunan R merupakan semigrup :

   i) Tertutup $(\forall a, b \in R), a \cdot b \in R$

ii) Asosiatif $(\forall a, b, c \in R), a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

c) Terhadap operasi " $+$ " dan " $\cdot$ ", himpunan R memenuhi sifat distributif :
i) Distributif Kiri $(\forall a, b, c \in R), a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

ii) Distributif Kanan $(\forall a, b, c \in R), (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Selanjutnya himpunan R yang membentuk ring terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan yang didefinisikan padanya, dinotasikan dengan $(R, +, \ \cdot)$.

Contoh 3

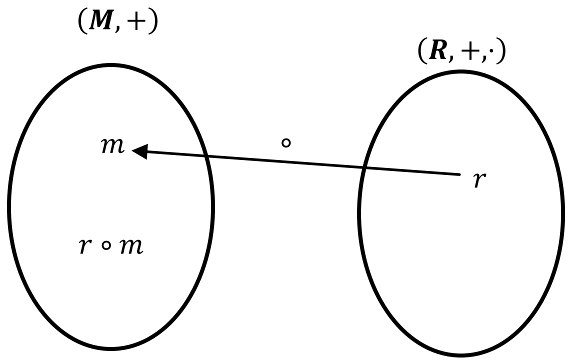
Diberikan himpunan $\mathbb{R}$, yaitu himpunan bilangan real. Didefinisikan operasi " $+$ " dan " $\cdot$ ". Maka dapat ditunjukkan $(\mathbb{R}, +, \ \cdot)$ merupakan ring.

Contoh 4

Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$, yaitu himpunan bilangan bulat modulo 6. Didefinisikan operasi " $+$ " dan " $\cdot$ ". Maka dapat ditunjukkan $(\mathbb{Z}_6, +, \ \cdot)$ merupakan ring.

Definisi 4 Modul

Diberikan Grup Abelian $(M, +)$ dan Ring $(R, +, \ \cdot)$ dengan elemen satuan. Kemudian didefinisikan operasi $\circ : R \times M \to M$ dengan definisi $\circ\,(r, m) = r \circ m$ untuk setiap $r \in R$ dan $m \in M$.



Himpunan M disebut modul kiri atas Ring R jika memenuhi aksioma-aksioma berikut :

i) $(r_1 + r_2) \circ m_1 = r_1 \circ m_1 + r_2 \circ m_1$

ii) $r_1 \circ (m_1 + m_2) = r_1 \circ m_1 + r_1 \circ m_2$

iii) $(r_1 \cdot r_2) \circ m_1 = r_1 \circ (r_2 \circ m_1)$

iv) $1 \circ m_1 = m_1$

Untuk setiap $r_1, r_2 \in R$ dan $m_1, m_2 \in M$.

Himpunan M disebut modul kanan atas Ring R jika memenuhi aksioma-aksioma berikut :

i) $m_1 \circ (r_1 + r_2) = m_1 \circ r_1 + m_1 \circ r_2$

ii) $(m_1 + m_2) \circ r_1 = m_1 \circ r_1 + m_2 \circ r_1$

iii) $m_1 \circ (r_1 \cdot r_2) = (m_1 \circ r_1) \circ r_2$

iv) $m_1 \circ 1 = m_1$

Untuk setiap $r_1, r_2 \in R$ dan $m_1, m_2 \in M$.

Selanjutnya, himpunan M disebut Modul atas Ring R jika M merupakan modul kiri sekaligus modul kanan.

Contoh 5

Diberikan himpunan $\mathbb{R}^n$ yaitu himpunan vektor-vektor berdimensi n atas bilangan real yang merupakan grup abelian terhadap operasi $" + "$ dan diberikan himpunan $M_{n\times n}(\mathbb{R})$, yaitu himpunan matriks-matriks bujur sangkar atas bilangan real yang merupakan ring dengan elemen satuan terhadap operasi $" + "$ dan $" \cdot "$. Maka dapat ditunjukkan himpunan $\mathbb{R}^n$ merupakan modul kiri atas himpunan $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Contoh 6

Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ yaitu himpunan bilangan bulat modulo 3 yang merupakan grup abelian terhadap operasi $" + "$ dan diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ yang merupakan ring dengan elemen satuan terhadap operasi $" + "$ dan $" \cdot "$. Maka dapat ditunjukkan himpunan $\mathbb{Z}_3$ merupakan modul atas himpunan $\mathbb{Z}$.

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

Semialjabar atas Hemiring

Pada bagian ini, akan dibahas mengenai struktur semialjabar atas suatu himpunan yang hemiring. Pertama akan diperkenalkan bagaimana struktur dari hemiring. Kemudian suatu himpunan hemiring R dikatakan semialjabar atas suatu hemiring S jika hemiring R bersifat semimodul kiri dan semimodul kanan atas hemiring S yang memenuhi $(ax)b = a(xb)$ untuk setiap $a, b \in S$ dan $x \in R$.

Berdasarkan latar belakang tersebut, diberikan beberapa definisi yang terkait dengan sub pokok bahasan sebagai berikut :

Definisi 5 Hemiring

Misalkan H adalah sebarang himpunan tak kosong, dan pada H didefinisikan dua operasi yakni penjumlahan " $+$ " dan pergandaan " $\cdot$ " Himpunan H disebut Hemiring (selanjutnya ditulis $(H, +, \ \cdot)$), jika memenuhi aksioma-aksioma berikut :

a) $(H, +)$ merupakan monoid komutatif dengan elemen identitas 0.
   i) Tertutup $(\forall a, b \in H)\ a + b \in H$
   ii) Asosiatif $(\forall a, b, c \in H)\ a + (b + c) = (a + b) + c$
   iii) Terdapat elemen identitas $(\exists 0 \in H)(\forall a \in H)\ a + 0 = 0 + a = a$
   iv) Komutatif $(\forall a, b \in H)\ a + b = b + a$
b) $(H, \ \cdot)$ merupakan semigrup
   i) Tertutup $(\forall a, b \in H)\ a \cdot b \in H$
   ii) Asosiatif $(\forall a, b, c \in H)\ a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
c) Distributif
   i) Distributif kiri : $(\forall a, b, c \in H)\ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
   ii) Distributif kanan : $(\forall a, b, c \in H)\ (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
d) Untuk setiap $a \in H, a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

Contoh 7

Diberikan himpunan $M_{n\times n}(\mathbb{Z}_6)$, yaitu himpunan matriks-matriks bujur sangkar atas $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$. Dapat ditunjukkan $M_{n\times n}(\mathbb{Z}_6)$ merupakan hemiring terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan.

Penyelesaian :

a) Akan ditunjukkan $(M_{n\times n}(\mathbb{Z}_6), +)$ merupakan monoid komutatif.
   i) Tertutup

      Ambil sebarang $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{Z}_6),\ \ a_{ij,}b_{ij} \in \mathbb{Z}_6$.

      Akan ditunjukkan $A + B \in M_{n\times n}(\mathbb{Z}_6)$

      Karena $a_{ij,}b_{ij} \in \mathbb{Z}_6$ maka $a_{ij} + b_{ij} \in \mathbb{Z}_6$.

      Sehingga $A + B \in M_{n\times n}(\mathbb{Z}_6)$
   ii) Asosiatif

      Ambil sebarang $A = [a_{.\,j}], B = [b_{ij}], C = [c_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{Z}_6),\ \ a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in \mathbb{Z}_6$.

      Akan ditunjukkan $A + (B + C) = (A + B) + C$

Karena $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in \mathbb{Z}_6$ maka berlaku $A + (B + C) = (A + B) + C$

iii) Terdapat elemen identitas

$(\exists X = [x_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{Z}_6), x_{ij} = \bar{0})(\forall A = [a_{ij}] \in M_{n\times n}, a_{ij} \in \mathbb{Z}_6)$,

$A + X = X + A = A$

iv) Komutatif

Ambil sebarang $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{Z}_6),\ a_{ij,} b_{ij} \in \mathbb{Z}_6$.

Akan ditunjukkan $A + B = B + A$

Karena $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{Z}_6$ maka $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$, sehingga $A + B = B + A$

b) Akan ditunjukkan $(M_{n\times n}(\mathbb{Z}_6),\ \cdot)$ merupakan semigrup.

i) Tertutup

Ambil sebarang $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{Z}_6),\ a_{ij,} b_{ij} \in \mathbb{Z}_6$.

Akan ditunjukkan $A \cdot B \in M_{n\times n}(\mathbb{Z}_6)$

Dengan menggunakan aturan perkalian dua matriks, diperoleh $A \cdot B = C = [c_{ij}]$, sedemikian sehingga :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\ , i = 1,2, \ldots n, \qquad j = 1,2, \ldots n$$

Karena $a_{ij,} b_{ij} \in \mathbb{Z}_6$ maka $c_{ij} \in \mathbb{Z}_6$. Sehingga $A \cdot B = C = [c_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{Z}_6)$.

ii) Asosiatif

Ambil sebarang $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}], C = [c_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{Z}_6),\ a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in \mathbb{Z}_6$

Maka berlaku $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

c) Akan ditunjukkan $(M_{n\times n}(\mathbb{Z}_6), +,\ \cdot)$ memenuhi sifat distributif.

i) Distributif kiri

Ambil sebarang $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}], C = [c_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{Z}_6),\ a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in \mathbb{Z}_6$

Maka berlaku $A \cdot (B + C) = A \cdot D +$ 墒 $\cdot C$

ii) Distributif kanan

Ambil sebarang $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}], C = [c_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{Z}_6),\ a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in \mathbb{Z}_6$

Maka berlaku $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

d) Akan ditunjukkan $(\forall A \in M_{n\times n}(\mathbb{Z}_6)), A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$

Ambil sebarang $A = \left[a_{\sim\sim j}\right] \in M_{n\times n}(\mathbb{Z}_6),\ a_{ij} \in \mathbb{Z}_6$

Maka $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$, 0 merupakan matriks dengan setiap unsurnya $\overline{0}$.

Berdasarkan a), b) c) dan d) maka terbukti $(M_{n\times n}(\mathbb{Z}_6), +,\ \cdot)$ merupakan hemiring.

Contoh 8

Diberikan himpunan $H = \{2x | x \in \mathbb{Z}, x \geq 0\}$, yaitu himpunan bilangan bulat genap tak negatif. Dapat ditunjukkan H merupakan hemiring terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan.

Penyelesaian :

a) Akan ditunjukkan $(H, +)$ merupakan monoid komutatif.

i) Tertutup

Ambil sebarang $2x, 2y \in H,\ x, y \in \mathbb{Z},\ \ x \geq 0, y \geq 0$

Akan ditunjukkan $2x +\ 2y \in H$

$2x + 2y = 2(x + y) \in H$

ii) Asosiatif

Ambil sebarang $2x, 2y, 2z \in H,\ x, y, z \in \mathbb{Z},\ \ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

Akan ditunjukkan $2x + (2y + 2z) = (2x + 2y) + 2z$

$2x + (2y + 2z) = 2x + 2(y + z) = 2\big(x + (y + z)\big) = 2\big((x + y) + z\big)$

$= 2(x + y) + 2z = (2x + 2y) + 2z$

iii) Terdapat elemen identitas

$(\exists 2 \cdot 0 \in H)(\forall 2x \in H), x \in \mathbb{Z},\ \ x \geq 0$

Berlaku $2x + 2 \cdot 0 = 2(x + 0) = 2\ a = 2(0 + x) = 2 \cdot 0 + 2x$

iv) Komutatif

Ambil sebarang $2x, 2y \in H,\ x, y \in \mathbb{Z},\ \ x \geq 0, y \geq 0$

Akan ditunjukkan $2x +\ 2y = 2y + 2x$

$2x +\ 2y = 2(x + y) = 2(y + x) = 2y + 2x$

b) Akan ditunjukkan $(H,\ \cdot)$ merupakan semigrup.

i) Tertutup

Ambil sebarang $2x, 2y \in H,\ x, y \in \mathbb{Z},\ \ x \geq 0, y \geq 0$

Akan ditunjukkan $2x \cdot 2y \in H$

$2x \cdot 2y = 2(x2y) \in H$

ii) Asosiatif

Ambil sebarang $2x, 2y, 2z \in H,\ x, y, z \in \mathbb{Z},\ \ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

Maka berlaku $2x \cdot (2y \cdot 2z) = (2x \cdot 2y) \cdot 2z$

c) Akan ditunjukkan $(H, +,\ \cdot)$ memenuhi sifat distributif

i) Distributif Kiri

Ambil sebarang $2x, 2y, 2z \in H,\ x, y, z \in \mathbb{Z},\ \ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

Maka berlaku $2x \cdot (2y + 2z) = 2x \cdot 2y + 2x \cdot 2z$

ii) Distributif Kanan

Ambil sebarang $2x, 2y, 2z \in H,\ x, y, z \in \mathbb{Z},\ \ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

Maka berlaku $(2x + 2y) \cdot 2z = 2x \cdot 2z + 2y \cdot 2z$

d) Ambil sebarang $2x \in H, x \in \mathbb{Z},\ \ x \geq 0$

$2x \cdot (2 \cdot 0) = (2 \cdot 0) \cdot 2x = 0$

Berdasarkan a), b) c) dan d) maka terbukti $(H, +,\ \cdot)$ merupakan hemiring.

Definisi 6

Diberikan suatu himpunan hemiring $(H, +,\ \cdot)$. Hemiring $(H, +,\ \cdot)$ disebut:

i) Hemiring komutatif jika $(H,\ \cdot)$ komutatif.

ii) Hemiring dengan elemen satuan jika $(H,\ \cdot)$ mempunyai elemen satuan, sedemikian sehingga $(\exists 1 \in H)(\forall a \in H)\ a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

iii) Hemiring kanselatif penjumlahan jika $(\forall a, b, c \in H) a + c = b + c \Rightarrow a = b$

Contoh 9

Berdasarkan contoh 8, diberikan hemiring $H = \{2x | x \in \mathbb{Z}, x \geq 0\}$, yaitu himpunan bilangan bulat genap tak negatif. Maka dapat ditunjukkan bahwa $(H,\ \cdot)$ merupakan hemiring komutatif.

Penyelesaian

Ambil sebarang $2x, 2y \in H,\ x, y \in \mathbb{Z},\ \ x \geq 0, y \geq 0$

Maka berlaku $2x \cdot\ 2y = 2y \cdot 2x$

Sehingga hemiring $H = \{2x | x \in \mathbb{Z}, x \geq 0\}$ merupakan hemiring komutatif.

Contoh 10

Berdasarkan contoh 7, diberikan hemiring $M_{n\times n}(\mathbb{Z}_6)$, yaitu himpunan matriks − matriks bujur sangkar atas $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. Maka dapat ditunjukkan bahwa ($M_{n\times n}(\mathbb{Z}_6)$, ·) merupakan hemiring dengan elemen satuan.

Penyelesaian

$$\left(\exists E = \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \cdots & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \cdots & \bar{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{0} & \bar{0} & \cdots & \bar{1} \end{bmatrix} \in M_{n\times n}(Z_6) \right),$$ sedemikian sehingga ambil sebarang $A = [a_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{Z}_6)$, berlaku $A \cdot E = E \cdot A = A$

Sehingga hemiring $M_{n\times n}(\mathbb{Z}_6)$ merupakan hemiring dengan elemen satuan.

Contoh 11

Berdasarkan contoh 8, diberikan hemiring $H = \{2x | x \in \mathbb{Z}, x \geq 0\}$, yaitu himpunan bilangan bulat genap tak negatif. Maka dapat ditunjukkan bahwa H merupakan hemiring kanselatif penjumlahan.

Penyelesaian :

Ambil sebarang $2\ \ , 2y, 2z \in H$, $x, y, z \in \mathbb{Z}$, $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$. Jika berlaku $2x + 2z = 2y + 2z$, maka $2x = 2y$

Definisi 7

Misalkan H adalah suatu himpunan yang hemiring. Diberikan himpunan M monoid komutatif terhadap operasi penjumlahan dengan elemen identitas 0. Himpunan M disebut semimodul kiri atas H jika untuk setiap $a \in H$ dan $x \in M$, maka $ax \in M$ dan memenuhi aksioma-aksioma berikut :

i) $a(x + y) = ax + ay$

ii) $(a + b)x = ax + bx$

iii) $(ab)x = a(bx)$

iv) $0x = a0 = 0$

Untuk setiap $a, b \in H$ dan $x, y \in M$.

Contoh 12

Diberikan monoid komutatif $M_{n\times n}(\mathbb{Z}_6)$, yaitu himpunan matriks-matriks bujur sangkar atas $\mathbb{Z}_6$ dengan elemen identitas matriks 0, dan diberikan hemiring $H=\{2x|x\in\mathbb{Z}, x\geq 0\}$, yaitu himpunan bilangan bulat genap tak negatif. Dapat ditunjukkan $M_{n\times n}(\mathbb{Z}_6)$ merupakan semimodul kiri atas hemiring H.

Penyelesaian :

a) Akan ditunjukkan $M_{n\times n}(\mathbb{Z}_6)$ merupakan semimodul kiri atas $H=\{2x|x\in\mathbb{Z}, x\geq 0\}$.

i) Ambil sebarang $2x\in H$, $x\in\mathbb{Z}$, $x\geq 0$ dan ambil sebarang $A=[a_{ij}], B=[b_{ij}]\in M_{n\times n}(\mathbb{Z}_6)$, $a_{ij}, b_{ij}\in\mathbb{Z}_6$

Akan ditunjukkan $2x(A+B)=2x\cdot A+2x\cdot B$

$$\begin{aligned}2x(A+B) &= 2x[a_{ij}+b_{ij}]\\ &= [2x(a_{ij}+b_{ij})]\\ &= [2x\cdot a_{ij}+2x\cdot b_{ij}]\\ &= [2x\cdot a_{ij}]+[2x\cdot b_{ij}]\\ &= 2x[a_{ij}]+2x[b_{ij}]\\ &= 2x\cdot A+2x\cdot B\end{aligned}$$

ii) Ambil sebarang $2x, 2y\in H$, $x, y\in\mathbb{Z}$, $x\geq 0, y\geq 0$ dan ambil sebarang $A=[a_{ij}]\in M_{n\times n}(\mathbb{Z}_6)$, $a_{ij}\in\mathbb{Z}_6$

Akan ditunjukkan $(2x+2y)A=2x\cdot A+2y\cdot A$

$$\begin{aligned}(2x+2y)A &= (2x+2y)[a_{ij}]\\ &= [(2x+2y)a_{ij}]\\ &= [2x\cdot a_{ij}+2y\cdot a_{ij}]\\ &= [2x\cdot a_{ij}]+[2y\cdot a_{ij}]\\ &= 2x\cdot[a_{ij}]+2y\cdot[a_{ij}]\\ &= 2x\cdot A+2y\cdot A\end{aligned}$$

iii) Ambil sebarang $2x, 2y\in H$, $x, y\in\mathbb{Z}$, $x\geq 0, y\geq 0$ dan ambil sebarang $A=[a_{ij}]\in M_{n\times n}(\mathbb{Z}_6)$, $a_{ij}\in\mathbb{Z}_6$

Akan ditunjukkan $(2x\cdot 2y)A=2x(2y\cdot A)$

$$\begin{aligned}(2x\cdot 2y)A &= (2x\cdot 2y)[a_{ij}]\\ &= [(2x\cdot 2y)a_{ij}]\\ &= [2x(2y\cdot a_{ij})]\\ &= 2x[2y\cdot a_{ij}]\\ &= 2x(2y[a_{ij}])\end{aligned}$$

$= 2x(2y \cdot \square)$

iv) Ambil sebarang $2x \in H$, $x \in \mathbb{Z}$, $x \geq 0$ dan ambil sebarang $A = [a_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{Z}_6)$, $a_{ij} \in \mathbb{Z}_6$
Maka berlaku $0 \cdot A = 2x \cdot 0 = 0$, dimana 0 merupakan matriks bujur sangkar dengan semua unsur elemen matriksnya nol.

Berdasarkan i) sampai iv) maka terbukti bahwa $M_{n\times n}(\mathbb{Z}_6)$ merupakan semimodul kiri atas $H = \{2x | x \in \mathbb{Z}, x \geq 0\}$.

Definisi 8

Misalkan H adalah suatu himpunan yang hemiring. Diberikan himpunan M monoid komutatif terhadap operasi penjumlahan dengan elemen identitas 0. Himpunan M disebut semimodul kanan atas H jika untuk setiap $a \in H$ dan $x \in M$, maka $xa \in M$ dan memenuhi aksioma-aksioma berikut :

i) $(x + y)a = xa + ya$

ii) $x(a + b) = xa + xb$

iii) $x(ab) = (xa)b$

iv) $x0 = 0a = 0$

Untuk setiap $a, b \in H$ dan $x, y \in M$.

Contoh 13

Diberikan monoid komutatif $M_{n\times n}(\mathbb{Z}_6)$, yaitu himpunan matriks-matriks bujur sangkar atas $\mathbb{Z}_6$ dengan elemen identitas matriks 0, dan diberikan hemiring $H = \{2x | x \in \mathbb{Z}, x \geq 0\}$, yaitu himpunan bilangan bulat genap tak negatif. Dapat ditunjukkan $M_{n\times n}(\mathbb{Z}_6)$ merupakan semimodul kanan atas hemiring H.

Penyelesaian :

Akan ditunjukkan $M_{n\times n}(\mathbb{Z}_6)$ merupakan semimodul kanan atas $H = \{2x | x \in \mathbb{Z}, x \geq 0\}$.

i) Ambil sebarang $2x \in H, x \in \mathbb{Z},\ x \geq 0$ dan
ambil sebarang $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{Z}_6)$, $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{Z}_6$
Akan ditunjukkan $(A + B)2x = A \cdot 2x + B \cdot 2x$

$$(A + B)2x = [a_{ij} + b_{ij}]2x$$
$$= [(a_{ij} + b_{ij})2x]$$
$$= [a_{ij} \cdot 2x + b_{ij} \cdot 2x]$$

$$= [a_{ij} \cdot 2x] + [b_{ij} \cdot 2x]$$
$$= [a_{ij}]2x + [b_{ij}]2x$$
$$= A \cdot 2x + B \cdot 2x$$

ii) Ambil sebarang $2x, 2y \in H$, $x, y \in \mathbb{Z}$, $x \geq 0, y \geq 0$ dan ambil sebarang $A = [a_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{Z}_6)$, $a_{ij} \in \mathbb{Z}_6$

Akan ditunjukkan $A(2x + 2y) = A \cdot 2x + A \cdot 2y$

$$A(2x + 2y) = [a_{ij}](2x + 2y)$$
$$= [a_{ij}(2x + 2y)]$$
$$= [a_{ij} \cdot 2x + a_{ij} \cdot 2y]$$
$$= [a_{ij} \cdot 2x] + [a_{\text{揃}j} \cdot 2y]$$
$$= [a_{ij}]2x + [a_{ij}]2y$$
$$= A \cdot 2x + A \cdot 2y$$

iii) Ambil sebarang $2x, 2y \in H$, $x, y \in \mathbb{Z}$, $x \geq 0, y \geq 0$ dan ambil sebarang $A = [a_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{Z}_6)$, $a_{ij} \in \mathbb{Z}_6$

Akan ditunjukkan $A\,(2x \cdot 2y) = (A \cdot 2x)2y$

$$A(2x \cdot 2y) = [a_{ij}](2x \cdot 2y)$$
$$= [a_{ij}(2x \cdot 2y)]$$
$$= [(a_{ij} \cdot 2x)2y]$$
$$= [a_{ij} \cdot 2x]2y$$
$$= ([a_{ij}]2x)2y$$
$$= (A \cdot 2x)2y$$

iv) Ambil sebarang $2x \in H$, $x \in \mathbb{Z}$, $x \geq 0$ dan ambil sebarang $A = [a_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{Z}_6)$, $a_{ij} \in \mathbb{Z}_6$

Maka berlaku $0 \cdot A = 2 \sim \cdot 0 = 0$, dimana 0 merupakan matriks bujur sangkar dengan semua unsur elemen matriksnya nol.

Berdasarkan i) sampai iv) maka terbukti bahwa $M_{n\times n}(\mathbb{Z}_6)$ merupakan semimodul kanan atas $H = \{2x|x \in \mathbb{Z}, x \geq 0\}$.

Definisi 9

Misalkan R adalah sebarang hemiring (*tidak harus komutatif dan mempunyai elemen satuan*). Misalkan S juga adalah sebarang hemiring. Himpunan R disebut semialjabar atas S jika R adalah semimodul kiri dan semimodul kanan (*bi-semimodul*) atas S yang memenuhi $(ax)b = a(xb)$ untuk setiap 榞, $b \in S$ dan $x \in R$.

Contoh 14

Dari contoh 12 dan 13, telah ditunjukan bahwa himpunan $M_{n\times n}(\mathbb{Z}_6)$ merupakan semimodul kiri dan semimodul kanan atas hemiring $H = \{2x|x \in \mathbb{Z}, x \geq 0\}$. Dengan kata lain $M_{n\times n}(\mathbb{Z}_6)$ merupakan bi-semimodul atas hemiring $H = \{2x|x \in \mathbb{Z}, x \geq 0\}$. Karena $M_{n\times n}(\mathbb{Z}_6)$ merupakan hemiring, maka dapat ditunjukkan bahwa himpunan $M_{n\times n}(\mathbb{Z}_6)$ merupakan semialjabar atas $H = \{2x|x \in \mathbb{Z}, x \geq 0\}$.

Penyelesaian :

Ambil sebarang $2x, 2y \in H,\ x, y \in \mathbb{Z},\ x \geq 0, y \geq 0$ dan ambil sebarang $A = [a_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{Z}_6)$, $a_{ij} \in \mathbb{Z}_6$.

Akan ditunjukkan $(2x \cdot A)2y = 2x(A \cdot 2y)$

$$
\begin{aligned}
(2x \cdot A)2y = (2x[a_{ij}])2y &= [2x \cdot a_{ij}]2y \\
&= [(2x \cdot a_{ij})2y] \\
&= [2x(a_{ij} \cdot 2y)] \\
&= 2x[a_{ij} \cdot 2y] \\
&= 2x([a_{ij}]2y) \\
&= 2x(A \cdot 2y)
\end{aligned}
$$

Terbukti hemiring $M_{n\times n}(\mathbb{Z}_6)$ merupakan semialjabar atas hemiring $H = \{2x|x \in \mathbb{Z}, x \geq 0\}$.

IV. KESIMPULAN

Dari pembahasan yang telah diuraikan, dapat disimpulkan bahwa :

1. Hemiring merupakan struktur aljabar yang diperlemah sifat-sifatnya dari struktur ring yakni pada hemiring tidak memandang adanya elemen invers terhadap operasi pergandaan.
2. Himpunan R dikatakan semialjabar atas S jika himpunan R dan S merupakan hemiring dan R merupakan bi-semimodul (semimodul kiri dan semimodul kanan) atas S yang memenuhi $(ax)b = a(xb)$ untuk setiap $a, b \in S$ dan $x \in R$.

DAFTAR PUSTAKA

Acharyya, S. K, Chattopadhyay, K. C and Ray, G. G. 2002. *Hemiring- homomorphisms, Stone Chech Compactification and Hewitt Realcompactification*. Southeast Asian Bulletin of Mathematics, No. 26, hal: 363-373.

Dr.rer.nat. Indah Emilia Wijayanti, M.Si dan Prof. Dr. Sri Wahyuni, M.S. 2013. *Bahan Ajar Pokok Bahasan I Teori Modul*.

Hikam S. M, Bambang Irawanto, Solichin Zaki. *Kongruensi Pada Semialjabar Atas Hemiring*. Semarang.

Howie, J. M. 1976. *An Introduction to Semigroup Theory*. Academic Press. London.

Sen, M. K. And Bandyopadhyay, S. 1993. *Structure Space of a Semialgebra Over a Hemiring*. Kyungpook Mathematical Journal, Vol. 33, No.1, hal: 25-36.