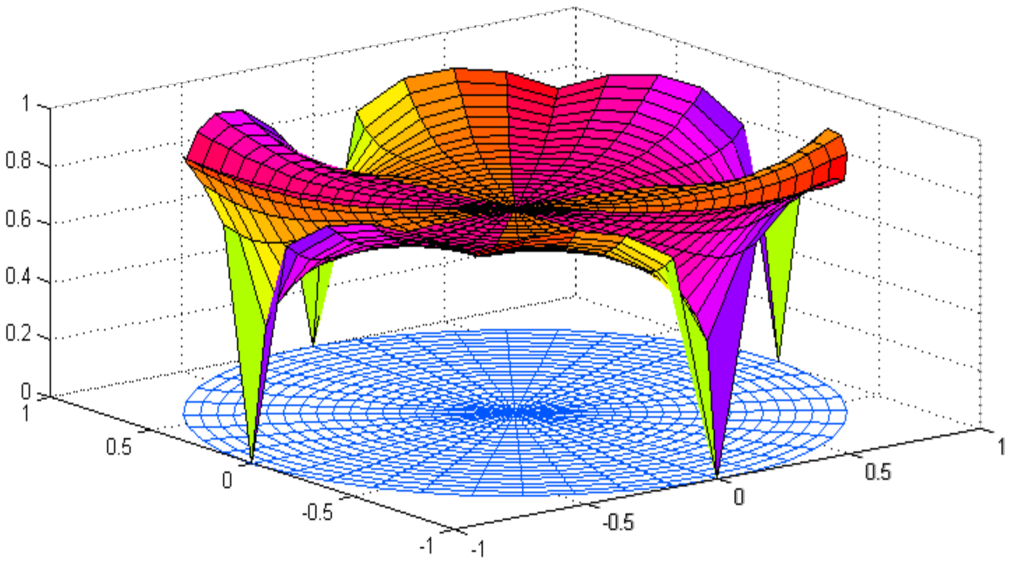
Volume 9 Nomor 2 Desember 2015

Barekeng

jurnal ilmu matematika dan terapan

ISSN 1978-7227



JURUSAN MATEMATIKA FMIPA UNIVERSITAS PATTIMURA

ALGORITMA UNTUK MENENTUKAN KEKOPOSITIFAN MATRIKS SIMETRIS BERUKURAN $n = 3, 4, 5$

Berny Pebo Tomasouw

Jurusan Matematika FMIPA Universitas Pattimura
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon, Indonesia
e-mail: peboberny@gmail.com

Abstrak

Matriks kopositif merupakan matriks simetris yang memenuhi sifat tertentu. Matriks ini dapat digunakan dalam menyelesaikan masalah pemrograman kuadratik, masalah kombinatorik dan persamaan diferensial. Dalam penelitian ini, akan dibentuk beberapa algoritma untuk memeriksa kekopositifan suatu matriks simetris yang berukuran $n = 3$, $n = 4$ dan $n = 5$.

Kata Kunci: Algoritma, matriks kopositif, matriks simetris.

AN ALGORITHM TO DETERMINE THE COPOSITIVITY OF A SYMMETRIC MATRIX OF ORDER $n = 3, 4, 5$

Abstract

Copositive matrix is a symmetric matrix which satisfy some certain conditions. This matrix can be applied in solving quadratics programming, combinatorial and differential equation. In this paper, some algorithms will be formed to verify the copositivity of a symmetric matrix of order $n = 3$, $n = 4$ and $n = 5$.

Keywords: Algorithm, copositive matrix, symmetric matrix.

1. Pendahuluan

Teori matriks memainkan peran yang sangat penting baik dari segi pengembangan teori maupun terapannya dalam menyelesaikan masalah matematika. Pada saat ini banyak jenis matriks yang telah dikembangkan dan diteliti. Salah satu contohnya adalah matriks kopositif.

Konsep matriks kopositif pertama kali dikemukakan oleh Motzkin (1952). Matriks kopositif adalah matriks simetris yang memenuhi sifat tertentu. Beberapa penelitian telah dilakukan untuk membahas sifat-sifat dasar dan karakteristik dari matriks kopositif. Selain itu dalam beberapa penelitian telah dibahas juga penerapan matriks kopositif dalam masalah pemrograman kuadratik, masalah kombinatorik maupun persamaan diferensial [[1], [2], [3], [4]].

Namun kenyataan yang dihadapi adalah tidaklah mudah menentukan apakah sebuah matriks simetris merupakan matriks kopositif atau bukan. Oleh karena itu dalam penelitian ini akan dibentuk algoritma berdasarkan teorema-teorema yang ada untuk memeriksa kekopositifan sebuah matriks.

2. Tinjauan Pustaka

Penelitian tentang matriks kopositif dimulai oleh Motzkin [5] dalam tulisannya yang berjudul "*Copositive Quadratic Forms*". Setelah itu banyak penelitian yang dilakukan untuk menentukan kriteria dari sebuah matriks kopositif. Salah satunya dilakukan oleh Andersson *dkk*. [6] dalam penelitiannya yang berjudul "*Criteria for copositive matrices using simplices and barycentric coordinates*". Dalam penelitian ini diberikan teorema yang memuat kriteria untuk memeriksa kekopositifan sebuah matriks.

Definisi 1. Matriks $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ dikatakan simetris jika berlaku $A = A^T$.

Definisi 2. Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ dikatakan tak negatif jika berlaku $x_i \geq 0$ untuk $i = 1, 2, \cdots, n$.

Contoh 1. Vektor $\mathbf{x} = (2,1,0)$ adalah vektor tak negatif.

Definisi 3. Diberikan matriks $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Submatriks utama dari *A* adalah submatriks yang diperoleh dengan cara menghapus baris ke-*i* dan kolom ke-*i* dari matriks *A*.

Contoh 2. Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$. Submatriks utama dari *A* adalah

$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, dan $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$.

Definisi 4. Matriks simetris $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ dikatakan **kopositif** (*copositive*) jika untuk setiap vektor tak negatif $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ berlaku $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \geq 0$. Sedangkan *A* dikatakan **kopositif tegas** (*strictly copositive*) jika untuk setiap vektor tak negatif $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ berlaku $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$.

Teorema berikut ini dari Hadeler [5] yang memuat kriteria matriks kopositif berukuran *n* = 2.

Teorema 1. Diberikan matriks simetris $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$. Matriks *A* dikatakan kopositif jika dan hanya jika

i. $a_{11} \geq 0$ dan $a_{22} \geq 0$;

ii. $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \geq 0$ atau $a_{12} \geq 0$;

sedangkan matriks *A* dikatakan kopositif tegas jika memenuhi

i. $a_{11} > 0$ dan $a_{22} > 0$;

ii. $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ atau $a_{12} \geq 0$.

Contoh 3. Matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ adalah matriks kopositif tegas, sedangkan matriks $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ adalah matriks kopositif.

3. Hasil dan Pembahasan

Dalam teorema berikut, Anderson [6] membahas syarat yang harus dipenuhi agar matriks simetris berukuran *n* = 3 dapat dikatakan sebagai matriks kopositif atau kopositif tegas.

Teorema 2. Diberikan matriks simetris $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$. Matriks A dikatakan kopositif jika dan hanya jika

i. $a_{ii} \geq 0$ untuk $i = 1, 2, 3$;

ii. $y_1 = \sqrt{a_{11}a_{12}} + a_{12} \geq 0$,

$y_2 = \sqrt{a_{11}a_{33}} + a_{13} \geq 0$ dan

$y_3 = \sqrt{a_{22}a_{33}} + a_{23} \geq 0$;

iii. $\sqrt{a_{11}a_{22}a_{33}} + a_{12}\sqrt{a_{33}} + a_{13}\sqrt{a_{22}} + a_{23}\sqrt{a_{11}} + \sqrt{2y_1y_2y_3} \geq 0$.

Sedangkan matriks A dikatakan kopositif tegas jika dan hanya jika

i. $a_{ii} > 0$ untuk $i = 1, 2, 3$;

ii. $y_1 = \sqrt{a_{11}a_{22}} + a_{12} > 0$,

$y_2 = \sqrt{a_{11}a_{33}} + a_{13} > 0$ dan

$y_3 = \sqrt{a_{22}a_{33}} + a_{23} > 0$;

iii. $\sqrt{a_{11}a_{22}a_{33}} + a_{12}\sqrt{a_{33}} + a_{13}\sqrt{a_{22}} + a_{23}\sqrt{a_{11}} + \sqrt{2y_1y_2y_3} > 0$.

Berdasarkan Teorema 2 dapat dibentuk algoritma untuk menentukan apakah matriks simetris merupakan matriks kopositif atau bukan. Algoritma yang dibentuk dalam penelitian ini akan menghasilkan keluaran berupa nilai $h = 1$, $h = 2$ atau $h = 3$ dengan penjelasan sebagai berikut:

i. Jika $h = 1$ maka matriks simetris yang diperiksa bukanlah matriks kopositif;

ii. Jika $h = 2$ maka matriks simetris yang diperiksa adalah matriks kopositif;

iii. Jika $h = 3$ maka matriks simetris yang diperiksa adalah matriks kopositif tegas.

Algoritma 1.

Diberikan matriks simetris $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$.

1) Periksa apakah ada elemen diagonal atau a_{ii} yang bernilai negatif. Jika ada $a_{ii} < 0$ maka $h = 1$ dan berhenti. Jika tidak ada a_{ii} yang negatif maka lanjut ke langkah 2.
2) Hitung

   $y_1 = \sqrt{a_{11}a_{22}} + a_{12}$;

   $y_2 = \sqrt{a_{11}a_{33}} + a_{13}$;

   $y_3 = \sqrt{a_{22}a_{33}} + a_{23}$;

   $\beta = \sqrt{a_{11}a_{22}a_{33}} + a_{12}\sqrt{a_{33}} + a_{13}\sqrt{a_{22}} + a_{23}\sqrt{a_{11}} + \sqrt{2y_1y_2y_3}$.
3) Jika ada salah satu dari nilai y_1, y_2, y_3 dan β yang bernilai negatif maka $h = 1$ dan berhenti. Jika tidak lanjut ke langkah 4.
4) Jika ada salah satu dari nilai y_1, y_2, y_3 dan β yang bernilai nol maka $h = 2$. Jika tidak maka $h = 3$.

Contoh 4.

Diberikan matriks simetris $A = \begin{bmatrix} 15 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & -2 \\ 1 & -2 & 16 \end{bmatrix}$.

Dengan menggunakan Algoritma 1 diperoleh keluaran $h = 3$. Hal ini berarti A adalah matriks kopositif tegas.

Untuk matriks simetris dengan ukuran $n \geq 4$, Anderson [6] menggunakan pendekatan partisi matriks untuk memeriksa apakah matriks yang diberikan merupakan matriks kopositif atau bukan.

Teorema 3.

Diberikan matriks simetris $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Matriks A dipartisi menjadi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{s}^T \\ \mathbf{s} & A_2 \end{bmatrix}.$$

dan dibentuk matriks $B = a_{11}A_2 - \mathbf{s}\mathbf{s}^T$, dengan $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{13} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{bmatrix}$.

Jika vektor **s** tak negatif $(\mathbf{s} \geq 0)$ maka

i. A adalah matriks kopositif jika dan hanya jika $a_{11} \geq 0$ dan A_2 kopositif;

ii. A adalah matriks kopositif tegas jika dan hanya jika $a_{11} > 0$ dan A_2 kopositif tegas.

Jika vektor **s** tak positif $(\mathbf{s} \leq 0)$ maka

i. A adalah matriks kopositif jika dan hanya jika $a_{11} \geq 0$ dan B kopositif;

ii. A adalah matriks kopositif tegas jika dan hanya jika $a_{11} > 0$ dan B kopositif tegas.

Teorema 3 hanya dapat diterapkan pada saat vektor $\boldsymbol{s}$ tak negatif atau tak positif. Jika tidak keduanya maka teorema ini tidak dapat diterapkan, seperti terlihat pada contoh berikut.

Contoh 5.

Diberikan matriks simetris $A = \begin{bmatrix} 11 & -1 & 1 & -3 \\ -1 & 15 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 9 & -2 \\ -3 & 1 & -2 & 16 \end{bmatrix}$.

Matriks A dipartisi menjadi $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{s}^T \\ \mathbf{s} & A_2 \end{bmatrix}$, dengan $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$, dan $A_2 = \begin{bmatrix} 15 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & -2 \\ 1 & -2 & 16 \end{bmatrix}$.

Terlihat bahwa $\boldsymbol{s}$ bukan vektor tak negatif maupun tak positif sehingga teorema tidak bisa digunakan.
Untuk mengatasi masalah ini maka Anderson memperkenalkan simplex standar dan polihedron yang didefinsikan sebagai berikut.

$$P = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n-1} \;\middle|\; \mathbf{u} = (u_2, \cdots, u_n) \geq 0, \sum_{i=2}^{n} u_i = 1 \right\} \text{ dan } P^{-1} = \left\{ \mathbf{u} \in P \;\middle|\; \mathbf{s}^T\mathbf{u} \leq 0 \right\}.$$

Selanjutnya polihedron P^{-1} dibagi menjadi simplex $\boldsymbol{s}^i$ sebanyak t, masing – masing simplex $\boldsymbol{s}^i$ memiliki verteks $V_1^i, V_2^i, \cdots, V_{n-1}^i$ misalkan $V_1^i = \mathbf{e}_k$ dengan $\mathbf{e}_k$ adalah vektor yang elemen ke-k sama dengan 1 dan bernilai nol untuk elemen lainnya serta verteks lainnya adalah

$$\{V_2^i, V_3^i, \cdots, V_{n-1}^i\} = \{V^{k,u_1}, V^{k,u_2}, \cdots, V^{k,u_{n-2}}\}$$

maka dapat dibentuk matriks W sebagai berikut

$$W = \begin{bmatrix} \mathbf{e}k \\ V^{k,u_1} \\ \vdots \\ V^{k,u_{n-2}} \end{bmatrix} \text{ dengan } \{u_1, u_2, \cdots, u_{n-2}\} \setminus \{k\}.$$

Sedangkan elemen ke-m vektor V^{k,u_i} dihitung dengan rumus

$$(V^{f,g})_m = \begin{cases} a_{1,g+1}, & \text{jika } m = f; \\ -a_{1,f+1}, & \text{jika } m = g, \text{ dengan syarat } f \neq g; \\ 0, & \text{untuk lainnya.} \end{cases}$$

Dengan menggunakan matriks W maka dapat diperiksa matriks simetris berukuran n = 4 dan n = 5 yang diperlihatkan dalam dua algoritma berikut ini.

Algoritma 2.

Diberikan matriks simetris $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}$.

1) Periksa apakah ada elemen diagonal atau a_{ii} yang bernilai negatif. Jika ada $a_{ii} < 0$ maka $h = 1$ dan berhenti. Jika tidak ada a_{ii} yang negatif maka lanjut ke langkah 2.

2) Bentuk submatriks utama

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{13} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{24} \\ a_{14} & a_{24} & a_{44} \end{bmatrix}, \text{ dan } A_4 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

3) Gunakan algoritma 1 untuk memeriksa submatriks A_1, A_2, A_3, A_4. Jika ada submatriks yang tidak kopositif maka $h = 1$ dan berhenti. Jika tidak lanjut ke langkah 4.

4) Partisi matriks A menjadi $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{s}^T \\ \mathbf{s} & A_2 \end{bmatrix}$ dengan $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \end{bmatrix}$ dan $A_2 = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}$, serta hitung banyaknya elemen negatif (dimisalkan dengan d) pada vektor **s.**

5) Jika $d = 0$ maka periksa apakah $a_{11} = 0$ atau A_2 kopositif. Jika ya maka $h = 2$ dan berhenti. Jika tidak maka lanjut ke langkah 6.

6) Jika $d = 0$, $a_{11} > 0$ dan A_2 kopositif tegas maka $h = 3$ dan berhenti. Jika tidak, lanjut ke langkah 7.

7) Jika $d = 1$ maka tentukan nilai k berdasarkan posisi elemen yang bernilai negatif yakni $a_{1,k+1}$.

   a) Bentuk matriks $W = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_k \\ V^{k,u} \\ V^{k,v} \end{bmatrix}, \{u, v\} = \{1,2,3\} \setminus \{k\}$.

b) Jika $W^T BW$ kopositif maka $h = 2$ dan berhenti.

c) Jika $a_{11} > 0$, $W^T BW$ kopositif tegas dan A_2 juga kopositif tegas maka $h = 3$ dan berhenti. Jika tidak lanjut ke langkah 8.

8) Jika $d = 2$ maka tentukan nilai i dan j berdasarkan posisi dua elemen yang bernilai negatif yakni $a_{1,i+1}$ dan $a_{1,j+1}$.

a) Bentuk matriks

$$W_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_i \\ \mathbf{e}_j \\ V^{i,k} \end{bmatrix} \text{ dan } W_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_j \\ V^{i,k} \\ V^{j,k} \end{bmatrix}.$$

b) Jika $W_1^T BW_1$ dan $W_2^T BW_2$ keduanya kopositif maka $h = 2$ dan berhenti.

c) Jika $a_{11} > 0$ dan matriks $W_1^T BW_1$, $W_2^T BW_2$, dan A_2 ketiganya matriks kopositif tegas maka $h = 3$ dan berhenti. Jika tidak lanjut ke langkah 9.

9) a) Jika $d = 3$ dan B kopositif maka $h = 2$.

b) Jika $d = 3$, $a_{11} > 0$ dan B kopositif tegas maka $h = 3$.

Algoritma 3.

Diberikan matriks simetris $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{45} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} \end{bmatrix}$.

1) Periksa apakah ada elemen diagonal atau a_{ii} yang bernilai negatif. Jika ada $a_{ii} < 0$ maka $h = 1$ dan berhenti. Jika tidak ada a_{ii} yang negatif maka lanjut ke langkah 2.

2) Hitung banyaknya elemen negatif (dimisalkan dengan d) dari baris pertama matriks A. Jika $d = 0$, $d = 2$ atau $d = 4$ maka lanjut ke langkah 4.

3) Periksa apakah baris lain yang banyaknya elemen negatif sama dengan 0, 2 atau 4. Jika ada baris ke-i yang memenuhi maka

a) Tukar baris ke-i dengan baris pertama

b) Tukar kolom ke-i dengan kolom pertama

4) Bentuk submatriks utama

$$L_1 = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{23} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{45} \\ a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} \end{bmatrix}, \ L_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{13} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{14} & a_{34} & a_{44} & a_{45} \\ a_{15} & a_{35} & a_{45} & a_{55} \end{bmatrix}, \ L_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} & a_{15} \\ a_{12} & a_{22} & a_{24} & a_{25} \\ a_{14} & a_{24} & a_{44} & a_{45} \\ a_{15} & a_{25} & a_{45} & a_{55} \end{bmatrix}$$

$$L_4 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{35} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{55} \end{bmatrix}, \text{ dan } L_5 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

5) Gunakan Algoritma 2 memeriksa submatriks L_1, L_2, L_3, L_4, L_5. Jika ada submatriks yang tidak kopositif maka $h = 1$ dan berhenti.

6) a) Jika $d = 0$ dan $a_{11} = 0$ maka $h = 2$ dan berhenti.

   b) Jika $d = 0$, $a_{11} > 0$ dan A_2 kopositif tegas maka $h = 3$ dan berhenti.

7) Jika $d = 2$ maka tentukan nilai i dan j berdasarkan posisi dua elemen yang bernilai negatif yakni $a_{1,i+1}$ dan $a_{1,j+1}$.

   a) Bentuk matriks

$$W_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_i \\ \mathbf{e}_j \\ V^{i,u} \\ V^{i,v} \end{bmatrix}, \; W_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_j \\ V^{i,u} \\ V^{i,v} \\ V^{j,u} \end{bmatrix}, \text{ dan } W_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_j \\ V^{i,v} \\ V^{j,u} \\ V^{j,v} \end{bmatrix}.$$

   b) Jika ada diantara matriks $W_1^T B W_1$, $W_2^T B W_2$ dan $W_3^T B W_3$ yang tidak kopositif maka $h = 1$ dan berhenti. Jika ketiganya matriks kopositif maka $h = 2$ dan berhenti. Jika $a_{11} > 0$ dan ketiganya kopositif tegas maka $h = 3$ dan berhenti.

8) a) Jika $d = 4$ dan B kopositif maka $h = 2$.

   b) Jika $d = 4$, $a_{11} > 0$, B kopositif tegas dan A_2 juga kopositif tegas maka $h = 3$.

Contoh 5.

Diberikan matriks simetris $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$. Dengan menggunakan algoritma 2, akan diperiksa apakah matriks kopositif atau tidak.

Karena semua elemen $a_{ii} > 0$ maka dibentuk submatriks utama

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \; L_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \; L_3 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \text{ dan } L_4 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan Algoritma 1 dapat diperoleh bahwa L_1, L_2, L_3 dan L_4 kopositif tegas.

Karena $A_2 = L_4$ maka diperoleh bahwa A_2 juga kopositif tegas.

Bentuk matriks

$$\begin{aligned} B &= a_{11} A_2 - SS^T \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 7 & 8 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Banyaknya elemen negatif pada baris pertama matriks A adalah $d = 2$, dengan elemen-elemen yang bernilai negatif adalah $a_{12} = -1$ dan $a_{14} = -3$ sehingga $i = 1$, $j = 3$ dan $k = 2$.

Selanjutnya, akan dihitung elemen-elemen dari $V^{1,2}$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned}(V^{1,2})_1 &= a_{13} \\ &= 1\end{aligned}, \quad \begin{aligned}(V^{1,2})_2 &= -a_{12} \\ &= 1\end{aligned} \quad \text{dan} \quad (V^{1,2})_3 = 0.$$

dan $V^{3,2}$ sebagai berikut

$$\left(V^{3,2}\right)_1 = 0, \quad \begin{aligned}\left(V^{3,2}\right)_2 &= -a_{14} \\ &= 3\end{aligned} \quad \text{dan} \quad \begin{aligned}\left(V^{3,2}\right)_3 &= a_{13} \\ &= 1\end{aligned}$$

Jadi, dapat dibentuk matriks W_1 dan W_2 sebagai berikut

$$W_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_i \\ \mathbf{e}_j \\ V^{i,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_3 \\ V^{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dan

$$W_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_3 \\ V^{1,2} \\ V^{3,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan Algoritma 1 dapat diperoleh bahwa matriks $W_1^T B W_1$ dan $W_2^T B W_2$ keduanya matriks kopositif tegas. Karena $a_{11} > 0$ dan matriks $A_2, W_1^T B W_1, W_2^T B W_2$ ketiganya matriks kopositif tegas maka $h = 3$. Hal ini berarti A adalah matriks kopositif tegas.

4. Kesimpulan

Banyaknya elemen negatif pada vektor **s** akan mempengaruhi penentuan kekopositifan sebuah matriks simetris. Selanjutnya Algoritma 1, 2 dan 3 akan dijalankan bersama-sama jika matriks yang diperiksa adalah matriks simetris berukuran $n = 5$.

Daftar Pustaka

[1] L. D. Baumert, “Extreme Copositive Quadratic Forms,” *Pacific J. Math.,* vol. 19, pp. 197-204, 1966.

[2] R. W. Farebrother, “Necessary and Sufficient Conditions for a Quadratic Form to be Positive whenever a Set of Linear Constraints is Satisfied,” *Linear Algebra Appl.,* vol. 16, pp. 39-42, 1977.

[3] J. W. Gaddum, “Linear Inequalities and Quadratic Forms,” *Pasific J. Math.,* vol. 8, pp. 411-414, 1958.

[4] D. H. Jacobson, Extentions of Linear Quadratic Control, Optimization, and Matrix Theory, New York: Academic, 1977.

[5] T. S. Motzkin, “Copositive Quadratic Forms,” *National Bureau of Standards Report,* pp. 11-22, 1952.

[6] L. E. Anderson, G. Chang dan T. Elfying, “Criteria for Copositive Matrices using Simplices and Barycentric Coordinates,” *Linear Algebra Appl.,* vol. 220, pp. 9-30, 1995.

[7] K. P. Hadeler, “On Copositive Matrices,” *Linear Algebra Appl.,* vol. 49, pp. 78-89, 1983.