Jurnal Barekeng
Vol. 5 No. 1 Hal. 9 – 13 (2011)

Barekeng
jurnal ilmu matematika dan terapan

MODEL DINAMIK INTERAKSI DUA POPULASI

(Dynamic Model Interaction of Two Population)

FRANCIS Y. RUMLAWANG[1], TRIFENA SAMPELILING[2]
[1] *Staf Jurusan Matematika, FMIPA, Unpatti*
[2] *Alumni Jurusan Matematika, FMIPA Unpatti*
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon
e-mail: rumlawang@yahoo.com

ABSTRACT

A few phenomena are completely described by a single number. For example, the size of a population of rabbits can be represented using one number, but how to know the rate of population change, we should consider other quantities such as the size of predator populations and the availability of food. This research will discuss a model of the evolution from two populations in a Predator-Prey system of differential equations which one species "eats" another. This model has two dependent variables, where both of functions not hang up of times. A solution of this system will be show in trajectory in phase plane, after we get and know equilibrium points until this model be a balanced solution.

Keywords: *Balanced solution, Equilibrium points, Phase plane, Predator-Prey, Trajectory*

PENDAHULUAN

Bila dua jenis populasi hidup dalam suatu lingkungan yang sama, dan saling berinteraksi dari waktu ke waktu tentu saja akan mempengaruhi keseimbangan lingkungan tersebut. Saling berinteraksi yang dimaksud adalah kedua populasi yang hidup pada lingkungan yang sama tersebut saling mempengaruhi satu dengan yang lainnya.

Tidak ada makhluk hidup yang dapat hidup terisolasi atau hidup tersendiri. Setiap makhluk hidup pasti akan membutuhkan makhluk hidup lainnya. Makhluk hidup di alam merupakan suatu sistem (individu-populasi-komunitas-ekosistem). Setiap spesies makhluk hidup saling berinteraksi antar individu maupun antar populasi (Supeni, 1999). Contohnya interaksi antara rubah dan kelinci, ular dan tikus, dan lain-lain. Seiring dengan interaksi tersebut terdapat rangkaian peristiwa memakan dan dimakan yang menjadikan ekosistem tetap seimbang. Peristiwa ini memberikan ide untuk membuat model matematika, yang dapat dipelajari dengan mudah. Dengan model matematika tersebut, dapat ditentukan perbandingan antara dua spesies agar ekosistem tetap seimbang.

Penelitian ini akan memperkenalkan suatu sistem sederhana yang dimodelkan dengan sistem persamaan diferensial. Sistem diperoleh berdasarkan rangkaian interaksi dari dua spesies. Berdasarkan model ini dapat diperoleh suatu informasi penting kapan dua spesies tersebut hidup seimbang sebagai ekosistem dan bilamana kondisi awal banyaknya masing-masing spesies diketahui.

Selanjutnya adalah bagaimana memperoleh model yang tepat berdasarkan kajian teori yang memadai dan bagaimana menganalisa model secara matematika.

Tujuan dari penelitian ini adalah Memperlihatkan model dari dua jenis populasi yang saling berinteraksi. Menganalisa model tersebut secara matematika. Menjelaskan hubungan antara kedua populasi tersebut.

TINJAUAN PUSTAKA

Dalam perkembangannya, model matematika seringkali digunakan sebagai solusi untuk menyelesaikan masalah tertentu. Dalam bukunya (Richard Haberman, 1977), memperkenalkan model dua spesies yang saling berinteraksi. Ia memberikan salah satu contoh termudah dari interaksi yang terjadi saat dua spesies bersaing terhadap sumber makanan yang sama. Contoh interaksi lainnya juga yaitu Mangsa-Pemangsa.

Dalam tulisannya Rumlawang (2010), memper-kenalkan bentuk interaksi dari dua populasi Mangsa-

Pemangsa yang telah dimodifikasi yang hidup dalam satu lingkungan dimana interaksi kedua populasi tersebut dimodelkan secara matematis ke dalam bentuk sistem persamaan diferensial biasa nonlinier.

Model dua spesies Mangsa-Pemangsa jelas saling mempengaruhi secara signifikan. Khususnya jika terdapat berlimpah spesies yang dimakan, maka pertumbuhan populasi pemakan akan cepat oleh karena berlebihnya makanan, begitu pula sebaliknya. Selanjutnya interaksi kedua spesies tersebut dapat dimodelkan dalam bentuk persamaan diferensial. (Waluya, 2006 dan Boyce, 1986).

Dalam persaiangan, spesies-spesies yang terlibat akan mengalami beberapa perlakuan. Paling sedikit ada dua spesies yang bersaiang dalam satu populasi dimana keduanya bersaing dalam hal apapun. Terkadang dua spesies itu tidak hanya dalam satu populasi, tetapi juga dalam satu ekosistem, yang kemudian akan digambarkan model-model populasi untuk masing-masing spesies dengan satu sistem persamaan. (Rahardi, 2008).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam bagian ini akan dibahas dua spesies yang berbeda, satu spesies disebut pemangsa (*Predator*) dan spesies lainnya disebut mangsa (*Prey*). Spesies mangsa mempunyai persediaan makanan yang berlebihan sedangkan spesies pemangsa diberi makanan spesies mangsa. Kajian matematika mengenai ekosistem seperti ini pertama kali diperkenalkan oleh Lotka dan Volterra dalam pertengahan tahun 1920.

Model Mangsa-Pemangsa

Model ini membahas dua spesies yakni pemangsa dan mangsa. Misalkan $x(t)$ dan $y(t)$ masing-masing menunjukkan banyaknya spesies mangsa dan pemangsa pada saat t. Jelas bahwa kedua spesies saling mempengaruhi secara signifikan. Khususnya jika terdapat berlimpah spesies mangsa, maka pertumbuhan populasi pemangsa akan cepat, oleh karena berlebihnya makanan. Alternatifnya jika pertumbuhan spesies mangsa lambat, maka spesies pemangsa akan banyak yang mati karena kekurangan makanan. Untuk memodelkan interaksi antara kedua spesies, dimulai dengan memperhatikan pemangsa dan mangsa jika tidak ada interaksi. Pertumbuhan spesies mangsa diberikan dengan,

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

dimana $a > 0$ merupakan konstanta pertumbuhan. Solusi dari persamaan diferensial di atas dapat mudah ditemukan, yakni $x(t) = x(0)e^{at}$, sehingga populasinya akan tumbuh terus tanpa batas. Dalam hal ini diasumsikan bahwa persediaan makanan cukup tak terbatas untuk spesies mangsa, sehingga pertumbuhannya tak terbatas yang berarti tidak ada spesies yang mati.

Seperti dalam model pertumbuhan spesies mangsa, dalam hal pertumbuhan spesies pemangsa diberikan dengan,

$$\frac{dy}{dt} = -cy$$

dimana c adalah konstanta penurunan. Alasan mengapa dalam hal ini terjadi penurunan adalah karena pada dasarnya akan mati kelaparan karena tidak ada makanan.

Akan tetapi bila kedua spesies itu berinteraksi dimana interaksi diperhitungkan dengan fakta bahwa pemangsa akan memakan spesies yang dimangsa, maka model matematika yang diungkapkan oleh Lotka dan Volterra menjadi

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy$$
$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy \qquad (1)$$

dimana,
x = populasi dari mangsa
y = populasi dari pemangsa
a = laju kelahiran dari populasi mangsa
c = laju kematian dari populasi pemangsa
b dan d adalah koefisien interaksi antara mangsa dan pemangsa
Sistem (1) merupakan sistem otonomus karena bebas dari t.

Populasi pemangsa akan memakan populasi mangsa sehingga beralasan untuk mengandaikan bahwa jumlah yang membunuh besarnya tiap satuan waktu berbanding lurus dengan x dan y yaitu xy. Jadi populasi mangsa akan berkurang, sedangkan populasi pemangsa akan bertambah. Artinya bahwa populasi mangsa akan mengalami penurunan karena spesies pemangsa akan memakannya, sementara populasi pemangsa akan mengalami pertumbuhan karena mempunyai persediaan makanan.

Sistem (1) ini tak linier dan sulit diselesaikan dengan cara analitik untuk menentukan solusi eksplisitnya. Namun demikian dengan teori kualitatif sistem semacam ini dapat dianalisa untuk membuat ramalan tentang kelakuan kedua spesies tersebut.

Titik Tetap

Dengan menyelesaikan sistem:

$$ax - bxy = 0$$
$$-cy + dxy = 0 \qquad (2)$$

penentuan titik kritisnya didapat $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ dan $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$. Dengan demikian sistem (2) akan mencapai solusi seimbang pada $\boldsymbol{x(t) = 0}$, $\boldsymbol{y(t) = 0}$ dan $\boldsymbol{x(t)} = \frac{c}{d}$, $\boldsymbol{y(t)} = \frac{a}{b}$. Dalam hal ini solusi seimbang kedua akan dikaji. Secara intuitif dapatlah ditentukan solusi sistem (2), yaitu $\boldsymbol{x(t) = 0}$, $\boldsymbol{y(t) = y(0)e^{-ct}}$ merupakan solusi khusus dengan trayektori sumbu $\boldsymbol{y}$ positif dan $\boldsymbol{y(t) = 0}$, $\boldsymbol{x(t) = x(0)e^{a(t)}}$ merupakan solusi khusus dengan trayektori sumbu $\boldsymbol{x}$ positif. Karena ketunggalan penyelesaian ini, maka setiap penyelesaian sistem (2) yang pada $\boldsymbol{t = 0}$ berawal pada kuadran pertama tidak akan memotong sumbu $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y}$, oleh karena itu solusi itu akan tetap berada pada kuadran pertama.

Trayektori

Trayektori sistem (1) diperoleh dari

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-cy + dxy}{ax - bxy} = \frac{(-c + dx)y}{(a - by)x}$$

$$\frac{a-by}{y}dy = \frac{-c+dx}{x}dx$$

atau

$$\left(\frac{a}{y}-b\right)dy = \left(-\frac{c}{x}+d\right)dx$$

Integralkan kedua ruas persamaan ini diperoleh penyelesaian umum,

$$a \ln y - by = -c \ln x + dx + k$$
$$\ln y^a + \ln x^c = by + dx + k$$
$$y^a x^c = e^{by+dx+k}$$
$$\frac{y^a}{e^{by}} \cdot \frac{x^c}{e^{dx}} = K \qquad (3)$$

dimana $K = e^k$ dan k merupakan konstanta sembarang. Persamaan (4.3) merupakan persamaan trayektori pada bidang-xy.

Dapat di lihat bahwa bila $K > 0$, trayektori (3) merupakan kurva tertutup, dan karena itu tiap penyelesaian $(x(t), y(t))$ dari (2) dengan nilai awal $(x(0), y(0))$ dalam kuadran pertama merupakan fungsi dari waktu yang periodik. Jika T merupakan periode dari penyelesaian $x(t), y(t)$, yaitu jika $(x(t+T), y(t+T))=xt,y(t)$ untuk semua $t\geq 0$, maka nilai rata-rata dari populasi $x(t)$ dan $y(t)$ adalah:

$$\bar{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt\,, \qquad \bar{y} = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)dt$$

Untuk menentukan nilai integral ini dapat diturunkan langsung dari sistem (2) tanpa mengetahu solusi eksplisit.

Dalam hal ini

$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy$$
$$\frac{dy/dt}{y} = -c + dx$$

Integralkan kedua ruas dari 0 sampai dengan T,

$$\int_0^T \frac{1}{y(t)}dy = \int_0^T (-c + d\,x(t))\,dt$$

$$\ln y(T) - \ln y(0) = -c\,T + d\int_0^T x(t)\,dt$$

Karena $y(T) = 0$ maka,

$$-c\,T + d\int_0^T x(t)\,dt = 0$$

atau

$$\frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt = \frac{c}{d}$$

Dengan demikian

$$\bar{x} = \frac{c}{d} \qquad (4)$$

Dengan cara yang sama akan diperoleh

$$\bar{y} = \frac{a}{b} \qquad (5)$$

Dari persamaan (4) dan (5) dapatlah dibuat ramalan yang menarik bahwa ukuran rata-rata dari dua populasi $x(t)$ dan $y(t)$ yang berinteraksi sesuai dengan model matematika yang digambarkan pada sistem (2) akan tepat mempunyai nilai seimbang pada $x = c/d$ dan $y = a/b$.

Misal populasi mangsa $x(t)$ berkurang dalam jumlah yang sedang, maka populasi mangsa dan pemangsa akan berkurang jumlahnya pada laju, katakanlah $\epsilon x(t)$ dan $\epsilon y(t)$, dimana ϵ adalah laju pengurangan populasi. Sehingga sistem menjadi

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy - \epsilon x$$
$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy - \epsilon y$$

atau

$$\frac{dx}{dt} = (a-\epsilon)x - bxy$$
$$\frac{dy}{dt} = -(c+\epsilon)y + dxy \qquad (6)$$

Dengan menerapkan sistem (6) dapat ditentukan bahwa rata-rata populasi mangsa dan pemangsa setelah adanya pengurangan masing-masing adalah

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c+\epsilon}{d}$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{a-\epsilon}{b}$$

Dengan kata lain rata-rata populasi mangsa akan lebih besar sedikit dari rata-rata sebelum adanya pengurangan sedangkan rata_rata populasi pemangsa sedikit lebih kecil dari rata-rata sebelumnya.

Contoh:

Model yang digunakan adalah:

$$\frac{dx}{dt} = 0{,}2x - 0{,}005xy$$
$$\frac{dy}{dt} = -0{,}5y + 0{,}01xy \qquad (7)$$

dimana $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, semuanya konstanta positif.

Titik kesetimbangan dari sistem (7) diperoleh bila

$$0{,}2x - 0{,}005xy = 0$$
$$-0{,}5y + 0{,}01xy = 0$$

sehingga sistem (7) akan memiliki titik tetap di (0,0) dan (50,40).

Dengan melakukan pelinearan terhadap sistem (7) yakni melalui ekspansi Taylor disekitar titik tetap, diperoleh matriks Jacobian untuk persamaan tersebut sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} 0{,}2 - 0{,}005y & -0{,}005x \\ 0{,}01y & -0{,}5 + 0{,}01x \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, dengan menggunakan analisis linearnya diperoleh, bahwa pada:

Titik Tetap (0,0)

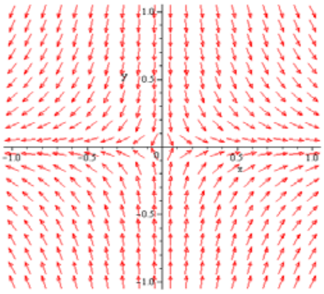
Matriks Jacobian $J_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0 \\ 0 & -0{,}5 \end{bmatrix}$

Perilaku dinamik untuk sistem (7) dapat diidentifikasi secara lengkap oleh nilai eigen dari matriks $J_{(0,0)}$, yaitu:

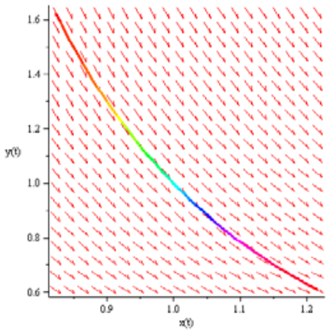
$$|\lambda I - J| = 0$$
$$\begin{vmatrix} \lambda - 0{,}2 & 0 \\ 0 & \lambda + 0{,}5 \end{vmatrix} = 0$$
$$(\lambda - 0{,}2)(\lambda + 0{,}5) = 0$$

sehingga nilai eigen untuk matriks tersebut yaitu $\lambda_1 = 0{,}2$ dan $\lambda_2 = -0{,}5$. Dengan demikian berdasarkan kajian terhadap nilai eigen kestabilan dari sistem adalah $\lambda_1 > 0$ dan $\lambda_2 < 0$, sehingga titik tetap ini bersifat sadel atau tidak stabil.

Trayektori dan titik tetapnya dapat dilihat pada Gambar 3. Selanjutnya Gambar 4 merupakan penyelesaian dari model dengan nilai awal $x(0) = 1$ dan $y(0) = 1$.



Gambar 3. Trayektori dan titik tetap.



Gambar 4. Penyelesaian model dengan nilai awal $x(0) = 1$ dan $y(0) = 1$.

Jelas bahwa berdasarkan Gambar (3), $t \to \infty$ dan setiap trayektori akan menuju titik tetap (0,0) dan akan menyinggung sumbu-x dan sumbu-y.

Titik Tetap (50,40)

Matriks Jacobian $J_{(50,40)} = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}25 \\ 0{,}4 & 0 \end{bmatrix}$

Perilaku dinamik untuk sistem (7) dapat diidentifikasi secara lengkap oleh nilai eigen dari matriks $J_{50,40}$, yaitu:

$$|\lambda I - J| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0{,}25 \\ -0{,}4 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

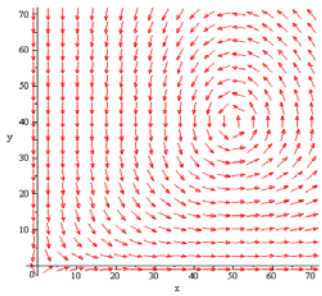
$$\lambda^2 - (0{,}25)(-0{,}4) = 0$$

Yang akan memberikan nilai eigen,

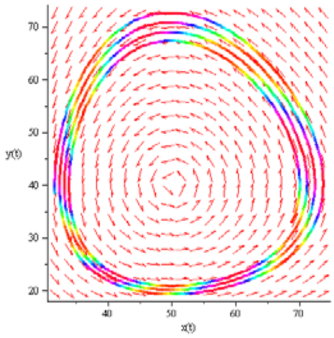
$$\lambda_{\pm} = \pm i\sqrt{0{,}1}$$

Jadi nilai-nilai eigennya adalah imajiner murni, dan akan memberikan pusat pada titik (50,40). Dengan demikian berdasarkan kajian terhadap nilai eigen kestabilan dari sistem adalah λ_1 dan λ_2 kompleks murni, sehingga titik tetap ini disebut pusat.

Trayektori dan titik tetapnya dapat dilihat pada Gambar 5. Selanjutnya Gambar 6 merupakan penyelesaian dari model dengan nilai awal $x(0) = 70$ dan $y(0) = 40$.

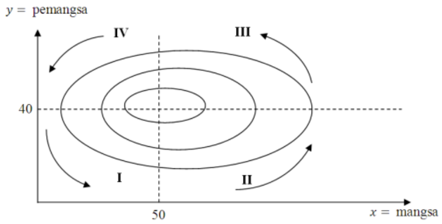


Gambar 5. Trayektori dan titik tetap.



Gambar 6. Penyelesaian model dengan nilai awal $x(0) = 70$ dan $y(0) = 40$.

Berdasarkan Gambar 6 maka trayektorinya tertutup, sehingga hubungan antara pemangsa dan mangsa dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 7. Hubungan antara mangsa dan pemangsa.

(I) Pemangsa menurun karena kelangkaan mangsa dan mangsa naik akibat kelangkaan pemangsa.
(II) Kenaikan populasi mangsa sesuai dengan penurunan populasi pemangsa.
(III) Pemangsa naik sesuai dengan penurunan populasi mangsa.
(IV) Sebagai akibat kelangkaan mangsa, baik mangsa maupun pemangsa menurun.

KESIMPULAN

Dari hasil pembahasan dan uraian pada Bab-bab sebelumnnya, maka dapatv diambil kesimpulan, antara lain sebagai berikut:

1. Laju populasi untuk dua jenis spesies Predator-Prey yang bersaing dalam satu ekosistem dapat dimodelkan secara matematik ke dalam bentuk persamaan diferensial, sehingga dari persamaan menggambarkan laju kedua populasi tersebut seimbang.

2. Model Predator-Prey $\frac{dx}{dt} = ax - bxy$ dan $\frac{dy}{dt} = -cy + dxy$ yang diberikan akan mancapai solusi keseimbangan jika $x(t) = 0$, $y(t) = 0$ dan $x(t) = \frac{c}{d}$, $y(t) = \frac{a}{b}$. Dengan melakukan analisis terhadap bidang fase, pada suatu saat kedua spesies yang bersaing mengalami beberapa keadaan naik turun popoulasi atau kepadatannya, dan ada saatnya juga kedua spesies yang bersaing itu dalam keadaan seimbang, dimana pupalasi kedua spesies tersebut mengalami penurunan hingga menuju titik keseimbangan.

DAFTAR PUSTAKA

Boyce, W. E. and R. C. DiPrima, (1986), *Elementary Differential Equation And Boundary Value Problem*, John Wiley and Sons, Inc., New York.

Haberman, Richard, (1977), *Mathematical Models*, Penerbit Prentice-Hall, New Jersey.

Rahardi, Rustanto, (2008), *Model Interaksi Dua Spesies*, Penerbit Center of Mathematics Education Development Universitas Islam Negeri Syarif Hidayatullah, Malang.

Rumlawang, F. Y., (2010), *Model Predator-Prey Modifikasi*, Penerbit FMIPA UNPATTI, Ambon.

Waluyo, S. B., (2006), *Persamaan Diferensial*, Penerbit Graha Ilmu, Yogyakarta.

file:///F:/Predator-Prey/hubungan-mangsa-pemangsa.html

file:///F:/Model%20Dua%20Spesies/Lotka%E2%80%93 Volterra_equation.htm