

APLIKASI ALJABAR MAKS-PLUS PADA JALUR TAKSI UNTUK MEMAKSIMUMKAN PENDAPATAN PENGEMUDI TAKSI

DORTEUS LODEWYIK RAHAKBAUW

Staf Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI

Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon

e-mail: lodewyik@gmail.com

ABSTRAK

Jaringan jalur transportasi pada suatu daerah memegang peranan penting dalam mobilitas masyarakat antar satu daerah, baik antar kota maupun antar tempat yang satu ke tempat yang lain. Berbagai macam alat transportasi digunakan baik alat transportasi umum maupun pribadi. Ditengah aktivitas yang padat masyarakat yang berekonomi menengah kebawah cenderung menggunakan taksi sebagai solusi untuk membantu aktivitas agar tepat waktu, ditengah kepadatan lalu lintas. Jalur taksi pada umumnya lebih bervariasi daripada jalur kendaraan umum karena tidak mempunyai jalur yang ditetapkan. Sopir taksi dalam hal ini cenderung memaksimalkan tarif/ongkos yang didapat untuk itu sering diambil jalur yang dapat memaksimalkan tarif/ongkos tersebut. Dalam paper ini dikonstruksikan model aljabar maks-plus untuk rute/jalur taksi yang dianggap maksimal dan akan ditempuh oleh seorang pengemudi taksi.

Keywords: *graph, jalur taksi, aljabar maks-plus, lintasan kritis*

PENDAHULUAN

Transportasi menjadi alat yang sangat penting dalam mobilitas masyarakat ditengah aktivitasnya sehari-hari. Namun seringkali transportasi seringkali dikaitkan dengan ketepatan waktu yang harus dicapai oleh pengguna alat transportasi.

Dalam paper ini penulis mencoba mengabaikan hal tersebut tetapi akan dikaji jalur taksi yang bisa menghasilkan pendapatan yang maksimal dari seorang pengemudi taksi.

Dengan mengabaikan waktu dan berorientasi pada tarif deterministi pada kajian jalur taksi, akan dikonstruksikan aljabar maks-plus untuk bagaimana pengemudi taksi dapat mencapai tujuan penumpang dengan memilih jalur-jalur yang dirasa sangat menguntungkanannya.

TINJAUAN PUSTAKA

Aljabar Maks-Plus

Elemen dasar dari aljabar maks-plus adalah bilangan real dan $\varepsilon = -\infty$. Operasi dasar dari aljabar maks-plus adalah *maximum* (dinotasikan dengan simbol \oplus , “dibaca :

O-plus”) dan *tambah* (dinotasikan dengan simbol \otimes , “dibaca O-times”) dengan dua operasi tersebut diperoleh :
 $x \oplus y = \max(x, y)$ dan $x \otimes y = x + y$

Untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$, dimana $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$. Catatan: $x \oplus \varepsilon = x = \varepsilon \oplus x$ untuk semua $x \in \mathbb{R}_\varepsilon$. Operasi \oplus dan \otimes yang diperluas ke matriks sebagai berikut :

$$(A \oplus B)_{i,j} = a_{i,j} \oplus b_{k,j} = \max(a_{i,j}, b_{k,j})$$

dan

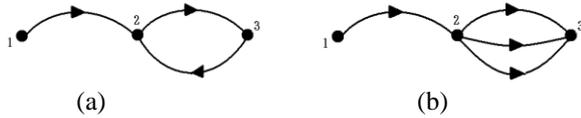
$$(A \otimes B)_{i,j} = \bigoplus_k a_{i,j} \otimes b_{k,j} = \max_k(a_{i,j}, b_{k,j})$$

untuk semua i, j .

Definisi Graph Dalam Aljabar Max-Plus

- Diberikan **graph berarah** $G = (V, A)$ dengan V adalah suatu himpunan berhingga tak kosong yang anggotanya disebut **titik (vertex)** dan A adalah suatu himpunan pasangan terurut titik-titik pada **garis (edge)** V .
- Suatu barisan garis dari $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{l-1}, i_l)$ dari suatu garis dinamakan **path**.
- Suatu path dikatakan **elementer** apabila tidak ada titik terjadi dua kali dalam path tersebut.
- Suatu **sirkuit** adalah path elementer tertutup yaitu $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{l-1}, i_l)$.

- Suatu graph berarah $G = (V, A)$ dengan $V = \{1, 2, \dots, n\}$ dikatakan **strongly connected** jika untuk setiap $i, j \in V, i \neq j$, terdapat suatu lintasan dari i ke j . Suatu graph yang memuat sirkuit disebut **graph siklik**, sedangkan suatu graph yang tidak memuat sirkuit disebut graph tak siklik.



Gambar 1. (a) merupakan path elementer, gambar (b) bukan path elementer

- Graph berarah G dikatakan berbobot jika setiap garis $(j, i) \in A$ dikawankan dengan suatu bilangan real A_{ij} . Bilangan real A_{ij} disebut bobot garis (j, i) , dilambangkan dengan $w(j, i)$. Graph preseden dari matriks $A \in R_{\max}^{n \times n}$ adalah graph berarah berbobot $G(A) = (V, A)$ dengan $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $A = \{(j, i) \mid w(i, j) = A_{ij} \neq \varepsilon, \forall i, j\}$. Sebaliknya untuk setiap graph berarah berbobot $G = (V, A)$ selalu dapat didefinisikan suatu matriks $A \in R_{\max}^{n \times n}$ dengan $A_{ij} = \begin{cases} w_{ij}, & \text{jika } (i, j) \in A \\ \varepsilon, & \text{jika } (i, j) \notin A \end{cases}$, yang disebut matriks bobot graph G .
- Bobot suatu path $P = (i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{l-1}, i_l)$ dinotasikan oleh $|P|_w$ dan diberikan oleh:
$$|P|_w = w(i_1, i_2) + w(i_2, i_3) + \dots + w(i_{l-1}, i_l) = (a_{i_2, i_1} + a_{i_3, i_2} + \dots + a_{i_l, i_{l-1}})$$
- Panjang dari path P / banyak garis dalam path P dinotasikan oleh $|P|_l$
- Bobot rata-rata dari path P adalah bobot P dibagi banyak garis dalam path P :
$$\frac{|P|_w}{|P|_l} = \frac{a_{i_2, i_1} + a_{i_3, i_2} + \dots + a_{i_l, i_{l-1}}}{(l - 1)}$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pemodelan Jaringan Transportasi (Jalur Taksi)

a. Asumsi pendukung.

Diasumsikan bahwa walaupun penumpang taksi cenderung berkeinginan sampai tepat pada waktunya namun pengemudi taksi selalu memperhitungkan biaya yang nantinya dia terima, sehingga pengemudi taksi akan mengambil jalur yang dirasanya dapat mencapai ongkos/tarif maksimum. Dengan kata lain pengemudi taksi yang menentukan jalur/rute untuk dicapai ke tempat tujuan penumpang.

Dalam kenyataannya seringkali terdapat faktor-faktor pendukung seorang pengemudi taksi mendapatkan tarif/biaya maksimum seperti waktu tunggu saat berada pada lampu lalu lintas, waktu tunggu pada saat terjadi kemacetan, kecepatan taksi yang diatur oleh pengemudi taksi, lama perjalanan dan sebagainya.

Dan sebaliknya faktor-faktor yang kurang mendukung adalah permintaan rute oleh penumpang kepada pengemudi taksi yang dapat meminimumkan pendapatan pengemudi taksi tersebut

Dalam paper ini dikaji sebuah contoh jalur taksi dengan ongkos/tarif deterministik yang sudah ditentukan

Tabel 1. Jalur dan biaya taksi

Kode	dari	Tujuan	Tarif (puluh ribu Rupiah)
1	K1	K1	5
2		A	3
3		A	4
4		K2	0
5		K3	7
6	K2	K1	0
7		A	4
8		K2	1
9		K3	0
10	K3	K1	0
11		A	2
12		K2	6
13		K3	2
14	A	K1	4
15		K2	6
16		K3	3

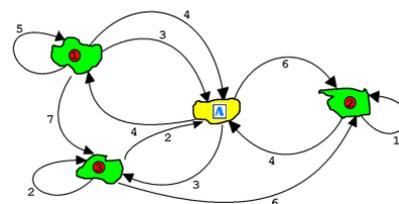
b. Contoh jalur taksi

Pada bagian ini akan dikaji jalur taksi yang digunakan oleh seorang pengemudi taksi dalam memaksimalkan pendapatan yang didapat. Dalam contoh ini dibuat graph berarah (*directed graph*), dimana ada 4 node yang menunjukkan tempat yakni kota 1(K₁), kota 2(K₂), kota 3(K₃), dan pelabuhan udara (*Airport*)(A), dimana bobot-bobot dari masing-masing garis(*edge*) menunjukkan tarif/ongkos rute.

Dari Tabel 1 terlihat pada kode 2, dan 3 terdapat jalur yang sama untuk itu pengemudi akan selalu memakai jalur yang dirasanya maksimum terhadap tarif/ongkos.

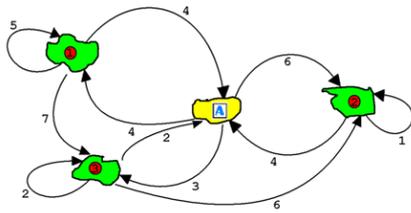
$$2 \oplus 3 = \text{maks}(3, 4) = 4$$

Dengan demikian jalur dari kode 2 akan selalu diabaikan oleh pengemudi taksi dan juga jalur dari kode 4, 6, 9, 10 karena menghasilkan tarif yang minimum



Gambar 2

Graph di atas diubah menjadi graph seperti di bawah ini karena diambil maksimum dari *path* yang sama.



Gambar 3

Graph berarah yang dibangun berdasarkan jalur taksi yang diberikan pada tabel

Dari graph diatas didapat matriks bobot sebagai berikut :

$$A = \begin{matrix} & k_1 & a & k_2 & k_3 \\ \begin{matrix} k_1 \\ a \\ k_2 \\ k_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 5 & 4 & \epsilon & 7 \\ 4 & \epsilon & 6 & 3 \\ \epsilon & 4 & 1 & \epsilon \\ \epsilon & 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Berdasarkan graph di atas dapat dibuat path berdasarkan kode sebagai berikut : 1, 3, 5, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 15, dan 16

Kajian Aljabar Maks-Plus dengan menggunakan Scilab

a. Menentukan *Maximum Cycle Mean* (MCM)

Diketahui ada 13 jalur siklus/sirkuit, dan secara manual didapat :

Tabel 2

No	JALUR SIRKUIT	CYCLE MEAN
1	K1-K1	5/1=5
2	K1-A-K1	(4⊗4)/2=4
3	K1-K3-A-K1	(7⊗2⊗4)/3= 4,33...
4	K1-K3-K2-A-K1	(7⊗6⊗4⊗4)/4=5,25
5	K2-K2	1/1=1
6	K2-A-K2	(6⊗4)/2=5
7	K2-A-K3-K2	(4⊗3⊗6)/3=4,33...
8	K2-A-K1-K3-K2	(4⊗4⊗7⊗6)/4=5,25
9	K3-K3	3/1=3
10	K3-A-K3	(2⊗3)/2=2,5
11	K3-A-K1-K3	(2⊗4⊗7)/3=4,33...
12	K3-K2-A-K3	(6⊗4⊗3)/3=4,33...
13	K3-K2-A-K1-K3	(6⊗4⊗4⊗7)/4=5,25

Pada dasarnya no. 3 dan 11 adalah bentuk siklus yang sama (misalkan siklus a), no. 4, 8, dan 13 juga sama (misalkan siklus b), no.7 dan 12 juga sama (misalkan siklus c), ditambah 1, 2, 5, 6, 9, 10 jadi ada 9 bentuk siklus/sirkuit. Dan *Maximum Cycle Mean* (MCM) dari 9 bentuk siklus/sirkuit adalah $(a \oplus b \oplus c \oplus 1 \oplus 2 \oplus 5 \oplus 6 \oplus 9 \oplus 10)$
 $= maks(a, b, c, 1, 2, 5, 6, 9, 10)$

$$= maks(4.33, 5.25, 4.33, 5, 4, 1, 5, 3, 10) = 5.25$$

Dengan menggunakan scilab :

```
-->t=-%inf
t =
-Inf
-->A=[5 4 t 7;4 t 6 3;t 4 1 t;t 2 6 2]
A =
5. 4. -Inf 7.
4. -Inf 6. 3.
-Inf 4. 1. -Inf
-Inf 2. 6. 2.
-->mcm=maxpluscmm(A)
mcm =
5.25
```

b. Lintasan kritis

Menentukan lintasan kritis adalah hal yang sangat penting bagi seorang pengemudi taksi, karena pada lintasan kritis tersebut akan dipakai sebagai jalur yang akan sering digunakan oleh pengemudi taksi.

Dengan mendapatkan maksimum dari semua siklus mean (*maximum cycle mean*), akan didapat rute yang menyebabkan tarif tersebut dalam hal ini bobot pada graph A menjadi maksimum.

Hal ini mengandung arti bahwa pada siklus tersebut pengemudi taksi dapat memaksimalkan tarif yang dicapai yakni sebesar 210.000 yakni no 4, 8 dan 13 yang menunjukkan rute masing-masing **K1-K3-K2-A-K1**, untuk berangkat dari kota 1; **K2-A-K1-K3-K2**, untuk berangkat dari kota 2, **K3-K2-A-K1-K3** untuk berangkat dari kota 3.

Berikut implementasi dengan scilab dalam hal menentukan lintasan kritis.

```
-->[l,d,x] = maxplusccir(A)
x =
1. 4. 3. 2.
d =
4.
l =
5.25
```

c. Strongly connected

Untuk mengecek apakah graph A ini *strongly connected* ataukah tidak maka dengan menggunakan tool yang ada pada scilab.

```
s = maxpluscsg(A)
s =
T
```

Didapat jawaban T yang berarti benar (*True*), hal ini berarti graph berarah A yang merupakan konstruksi graph atas jalur/rute taksi adalah *strongly connected*.

KESIMPULAN

Kesimpulan yang dapat di capai adalah :

Untuk memaksimalkan pendapatan pengemudi taksi dalam hal ini tarif/ongkos dari penumpang harus beroperasi pada lintasan kritis dalam hal ini maksimum dari siklus-siklus mean yang ada (*maximum cycle mean*).

Selanjutnya paper ini dapat disempurnakan dengan menggunakan maks-min untuk mendapatkan waktu yang minimum bagi keuntungan penumpang.

DAFTAR PUSTAKA

Stéphane Gaubert and Max Plus, **Methods and Applications of $(\max,+)$ Linear Algebra**, INRIA, Domaine de Voluceau, BP105, 78153 Le Chesnay Cedex, France.

<ftp://ftp.inria.fr/INRIA/publication/publi-pdf/RR/RR-3088.pdf>

Winarni, dan Subiono, *Penjadwalan jalur bus dalam kota dengan aljabar max-plus*, Seminar nasional matematika IV, Institut teknologi sepuluh nopember surabaya, 13 desember 2008

Subiono, (2000), *On classes of min-max-plus systems and their application*, Thesis Ph.D., Technische Universiteit Delft, Delft.

KARAKTERISASI ELEMEN IDEMPOTEN *CENTRAL*

HENRY W. M. PATTY¹, ELVINUS RICHARD PERSULESSY², RUDI WOLTER MATAKUPAN³

^{1,2,3} Staf Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI

Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon

e-mail: henry_4t00@yahoo.com, richardelvinus@yahoo.com, rwmatakupan@yahoo.com

ABSTRAK

Elemen idempoten e dalam suatu ring R dengan elemen satuan disebut idempotent *central* jika untuk sebarang $r \in R$ berlaku $er = re$. Selanjutnya dibentuk ring eRe yang merupakan subring dengan elemen satuan e . Dimotivasi dari struktur ring eRe akan diselidiki sifat-sifat dalam ring dan modul diantaranya, *indecomposable*, homomorfisma dan radikal Jacobson, dalam kaitannya dengan elemen idempotent *central*. Dalam tulisan ini akan dipelajari karakterisasi

Kata kunci: *indecomposable, homomorfisma, radikal Jacobson, idempoten central*

PENDAHULUAN

Dalam struktur ring R yang komutatif, jika mempunyai suatu elemen idempoten $e \in R$ maka ring R tersebut dapat didekomposisikan (*decomposable*) menjadi hasil kali langsung dari ring Re dan $R(1-e)$. Dilain pihak, terdapat ring yang tidak dapat dinyatakan sebagai hasil kali langsung dari dua ring yang tak nol. Ring ini disebut ring yang tidak dapat didekomposisikan (*indecomposable*). Dalam ring yang *indecomposable* ini, hanya 0 dan 1 yang merupakan elemen idempoten atau sering disebut idempoten trivial.

Sebaliknya dalam teori ring nonkomutatif, elemen idempoten dikenal dengan sebutan idempoten *central*. Hal ini berarti suatu ring R yang tak nol disebut *indecomposable* jika ring tersebut tidak memiliki elemen idempoten *central* yang nontrivial. Selanjutnya untuk memahami struktur ring *indecomposable* ini, diperlukan pengetahuan tentang karakteristik elemen idempoten *central* yang dalam perkembangannya lebih banyak berperan dalam teori ring nonkomutatif dibandingkan dalam teori ring komutatif. Oleh karena itu dalam tulisan ini akan dibahas karakteristik elemen idempoten khususnya elemen idempoten *central*.

TINJAUAN PUSTAKA

Untuk mempelajari karakteristik elemen idempoten *central* ini diperlukan beberapa pengetahuan dasar tentang ring dan modul diantaranya ideal maksimal, homomorfisma, radikal Jacobson dan jumlah langsung (*direct sum*) yang dikaji dari Malik (1997) dan Fuller (1992). Selanjutnya dalam bukunya yang berjudul *A first Course in Noncommutative Rings*, Tsit Yuen Lam (1991) menjelaskan beberapa sifat elemen idempoten *central* dan peranannya dalam struktur ring dan modul. Ring yang dibicarakan dalam tulisan ini adalah ring dengan elemen satuan. Jadi, tidak harus komutatif terhadap operasi pergandaan. Berikut ini diberikan beberapa definisi dan sifat yang melandasi karakterisasi elemen idempoten *central*.

Definisi 1

Suatu elemen $e \in R$ disebut elemen idempoten jika $e^2 = e$.

Selanjutnya diberikan beberapa sifat dalam ideal kanan eR dan $(1-e)R$ dengan asumsi analog untuk ideal kiri Re dan $R(1-e)$.

Proposisi 1.

Misalkan $e \in R$ elemen idempoten dalam R . Suatu ideal kanan eR dan $(1-e)R$ dapat dinyatakan sebagai berikut

$$eR = \{er \mid r \in R\} \text{ dan } (1-e)R = \{(1-e)r \mid r \in R\}$$

Selanjutnya didefinisikan hasil tambah langsung (*direct sum*) dari ideal kanan eR dan $(1-e)R$ sebagai berikut.

Definisi 2.

Misalkan eR dan $(1-e)R$ ideal kanan dalam R maka R disebut *direct sum* dari ideal kanan eR dan $(1-e)R$, dinotasikan $R = eR \oplus (1-e)R$, jika $R = eR + (1-e)R$ dan $eR \cap (1-e)R = \{0\}$.

Berikut ini diberikan definisi dan beberapa sifat dari ideal kanan maksimal dalam suatu ring R dengan asumsi bahwa definisi dan sifat-sifat tersebut juga berlaku untuk ideal kiri maksimal.

Definisi 3.

Ideal kanan $M \subseteq R$ disebut ideal kanan maksimal jika $M \neq R$ dan tidak terdapat suatu ideal kanan $I \subset R$ sedemikian sehingga $M \subset I \subset R$. Selanjutnya, suatu ideal kanan $N \subset R$ disebut ideal kanan minimal jika $N \neq \{0\}$ dan tidak terdapat ideal kanan $J \subset R$ sedemikian hingga $\{0\} \neq J \subset N \subset R$.

Berikut ini diberikan pengertian radikal Jacobson dari suatu ring dalam kaitannya dengan ideal kanan maksimal dengan asumsi yang analog untuk ideal kiri maksimal.

Definisi 4.

Radikal Jacobson dari suatu ring R (dinotasikan $Jac(R)$) adalah irisan dari semua ideal kanan maksimal dalam R . Jadi,

$$Jac(R) = \bigcap \{M \mid M \text{ ideal kanan maksimal dalam } R\}$$

Berdasarkan Definisi 3, dapat dipahami bahwa ideal kanan $M \subseteq R$ disebut ideal kanan maksimal jika terdapat suatu ideal kanan $I \subseteq R$ yang memenuhi sifat $M \subseteq I \subseteq R$ maka berlaku $I = M$ atau $I = R$. Selanjutnya, suatu ideal $I \subseteq R$ disebut ideal sejati jika $I \neq R$.

Selain itu radikal Jacobson dari suatu ring R dapat dipahami dengan bantuan elemen unit dalam ring tersebut, seperti yang termuat dalam sifat berikut ini.

Teorema 1. Jika $y \in Jac(R)$ maka $1-xy$ merupakan unit kiri untuk setiap $x \in R$.

Bukti: Diambil sebarang $y \in Jac(R)$. Akan ditunjukkan $1-xy$ merupakan unit kiri dalam R . Diandaikan terdapat $1-xy$ yang bukan unit kiri dalam R . Artinya $R(1-xy) \subset R$ dan $R(1-xy) \neq R$. Karena ideal

$R(1-xy) \subset R$ termuat dalam suatu ideal maksimal $M \subset R$. Akibatnya, $1-xy \in M$ dan $y \in M$ sehingga diperoleh $1 \in M$. Timbul kontradiksi dengan M sebagai ideal maksimal, maka $1-xy$ merupakan unit kiri dalam R . \square

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam bagian ini akan dibahas beberapa sifat elemen idempoten *central* sebagai berikut.

Karakterisasi Elemen Idempoten Central

Misalkan R ring dengan elemen satuan. Jika ideal eR dan $(1-e)R$ berturut-turut merupakan ideal kanan yang dibangun oleh elemen idempoten e dan $1-e$ maka ring R dapat dinyatakan sebagai dekomposisi dari eR dan $(1-e)R$, seperti yang dijelaskan dalam proposisi berikut ini.

Proposisi 2.

Misalkan R ring dengan elemen satuan. Elemen e dan $1-e$ idempoten di R , maka berlaku:

- (1) eR dan $(1-e)R$ ideal kanan dalam R .
- (2) $R = eR \oplus (1-e)R$.

Bukti:

(1) Diambil sebarang $er_1, er_2 \in eR$ dan $s \in R$. Akan ditunjukkan eR ideal kanan dalam R . Diperoleh, $er_1 - er_2 = e(r_1 - r_2) \in eR$ dan $er.s = e(rs) \in eR$. Terbukti eR merupakan ideal kanan dalam R . Analog untuk $(1-e)R$.

(2) Diambil sebarang $a \in R$ dan diketahui e elemen idempoten dalam R . Akan ditunjukkan $R = eR \oplus (1-e)R$. Diperoleh

$$a = ea + a - ea = ea + (1-e)a$$

dengan $ea \in eR$ dan $(1-e)a \in (1-e)R$. Hal ini berarti $R = eR + (1-e)R$. Selanjutnya diambil sebarang $b \in eR \cap (1-e)R$ yang artinya $b = ec$ dan $b = (1-e)d$ untuk suatu $c, d \in R$. Jika digandakan dengan $e \in R$ akan diperoleh $eb = e^2c = ec = b$ dan $eb = e(1-e)d = (e - e^2)d = (e - e)d = 0$. Dengan demikian $b = eb = 0$ atau $eR \cap (1-e)R = \{0\}$. Terbukti $R = eR \oplus (1-e)R$. \square

Berdasarkan Proposisi 2 dapat dinyatakan bahwa, suatu ring R juga merupakan jumlah langsung dari ideal-ideal kiri dalam R yang dibangun oleh elemen idempoten e dan $1-e$ (dinotasikan $R = Re \oplus R(1-e)$). Sedangkan untuk ring $R \neq 0$ yang tidak dapat dinyatakan sebagai jumlah langsung dari sebarang dua ideal yang tak nol disebut ring *indecomposable*. Ring tersebut hanya memiliki elemen idempoten yang trivial yaitu 0 dan 1.

Selanjutnya, jika e elemen idempoten *central* maka ring $eRe = \{ere \mid r \in R\}$ merupakan subring dengan elemen satuan e . Namun sebelumnya diberikan definisi elemen idempoten *central* sebagai berikut.

Definisi 5.

Suatu elemen idempoten $e \in R$ disebut *central* jika untuk sebarang $r \in R$ berlaku $er = re$. Himpunan semua elemen idempoten *central* dinotasikan dengan $C(R)$.

Proposisi 3.

Jika R ring dengan elemen idempoten *central* e maka $eRe = \{ere \mid r \in R\}$ merupakan subring dengan elemen satuan e .

Bukti:

Diambil sebarang $x_1, x_2 \in eRe$ dengan $x_1 = er_1e$ dan $x_2 = er_2e$, untuk suatu $r_1, r_2 \in R$. Akan ditunjukkan eRe merupakan subring dengan elemen satuan e .

- (i) $x_1 - x_2 = er_1e - er_2e = e(r_1 - r_2)e \in eRe$
(ii) $x_1 \cdot x_2 = (er_1e)(er_2e) = er_1e^2r_2e = e(r_1r_2)e = e(r_1r_2)e \in eRe$

Dari (i) dan (ii) terbukti eRe merupakan subring. Misalkan $e \in eRe$ dengan $e = e \cdot 1 \cdot e$ maka untuk setiap $x \in eRe$ dengan $x = ere$ diperoleh

$$ex = e(ere) = e^2re = ere = x$$

dan

$$xe = (ere)e = ere^2 = ere = x.$$

Terbukti eRe subring dengan elemen satuan e . \square

Berdasarkan Proposisi 3. maka suatu ring eRe dan fRf dapat dinyatakan sebagai berikut.

- (i) $eRe = \{er = r = re \mid r \in R\}$ dan
(ii) $fRf = \{fr = r = rf \mid r \in R\}$ (1)

dengan e dan $f = 1 - e$ berturut-turut merupakan elemen idempoten *central* sekaligus merupakan elemen satuan. Selanjutnya, diberikan proposisi tentang elemen idempoten *central* yang ditinjau dari (1).

Proposisi 4.

Suatu elemen idempoten e merupakan idempoten *central* ($e \in C(R)$) jika dan hanya jika $eRf = fRe = \{0\}$.

Bukti: Diambil sebarang $r \in R$ dan diberikan $e, f \in C(R)$ dengan $f = 1 - e$. Akan ditunjukkan $eRf = fRe = \{0\}$. Diperoleh

$$erf = er(1 - e) = er - ere = er - er = 0$$

dan

$$fre = (1 - e)re = re - ere = re - re = 0.$$

Terbukti $eRf = \{0\} = fRe$.

Sebaliknya, diberikan $eRf = fRe = \{0\}$. Akan ditunjukkan untuk setiap $r \in R$ berlaku $e \in C(R)$ atau $er - re = 0$. Jika $erf = 0$ dengan $f = 1 - e$ maka berlaku $er(1 - e) = 0$ atau $er - ere = 0$. Akibatnya, $er = ere$. Selanjutnya, jika $fre = 0$ maka berlaku $(1 - e)re = 0$ atau $re - ere = 0$. Akibatnya, $re = ere$. Terbukti, $re = ere = er$. \square

Dalam suatu ring R yang memiliki sebarang elemen idempoten e dan e' , dapat ditentukan $Hom_R(eR, e'R)$ sebagai homomorfisma dari eR ke $e'R$. Berikut ini diberikan suatu isomorfisma antara eR dan $e'R$ dengan suatu ring $e'Re$.

Proposisi 5.

Jika diberikan sebarang elemen idempoten e dan e' dalam suatu ring R dan M_R modul kanan atas ring R maka terdapat suatu isomorfisma grup aditif $\lambda: Hom_R(eR, M_R) \rightarrow M_Re$.

Bukti: Diberikan suatu homomorfisma modul, $\theta: eR \rightarrow M_R$. Untuk setiap $r \in R$ dengan $r \neq e$ diperoleh $\theta(er) = m$ sedangkan untuk $r = e$ juga diperoleh $\theta(ee) = m$. Karena e elemen idempoten maka $\theta(e) = m$ sehingga berlaku $\theta(er) = m = \theta(e)$. Selanjutnya, didefinisikan suatu pemetaan $\lambda: Hom_R(eR, M_R) \rightarrow M_Re$ dengan $\lambda(\theta) = me$, untuk setiap $m \in M_R$. Jika $\theta(e) = m$ maka diperoleh $me = \theta(e)e = \theta(e^2) = \theta(e) = m$ atau dengan kata lain $m = me \in M_Re$, sehingga berlaku $\lambda(\theta) = me = m = \theta(e)$.

Akan ditunjukkan λ isomorfisma grup aditif atau $Hom_R(eR, M_R) \cong M_Re$.

- (i) Akan ditunjukkan λ terdefinisi.

Diambil sebarang $\theta_1, \theta_2 \in Hom_R(eR, M_R)$ dengan $\theta_1 = \theta_2$. Akan ditunjukkan $\lambda(\theta_1) = \lambda(\theta_2)$. Jika $\theta_1 = \theta_2$ atau dengan kata lain $\theta_1 - \theta_2 = 0$ maka untuk suatu elemen idempoten $e \in R$ diperoleh $(\theta_1 - \theta_2)e = 0$. Selanjutnya, karena θ suatu homomorfisma modul maka berlaku $\theta_1(e) - \theta_2(e) = 0$ atau $\theta_1(e) = \theta_2(e)$. Mengingat definisi $\theta(e) = \lambda(\theta)$ maka untuk $\theta_1(e) = \theta_2(e)$ diperoleh $\lambda(\theta_1) = \lambda(\theta_2)$. Terbukti, λ terdefinisi.

- (ii) Akan ditunjukkan λ homomorfisma grup.

Diambil sebarang $\theta_1, \theta_2 \in Hom_R(eR, M_R)$.

Diperoleh

$$\begin{aligned} \lambda(\theta_1 + \theta_2) &= (\theta_1 + \theta_2)e = \theta_1(e) + \theta_2(e) \\ &= \lambda(\theta_1) + \lambda(\theta_2). \end{aligned}$$

Terbukti, λ homomorfisma grup.

- (iii) Akan ditunjukkan λ injektif.

Diambil sebarang $\lambda(\theta_1), \lambda(\theta_2) \in M_R e$ dengan $\lambda(\theta_1) = \lambda(\theta_2)$. Akan ditunjukkan $\theta_1 = \theta_2$. Karena $\lambda(\theta_1) = \lambda(\theta_2)$ atau $\lambda(\theta_1) - \lambda(\theta_2) = 0$ maka untuk suatu homomorfisma λ diperoleh $\lambda(\theta_1 - \theta_2) = 0$. Selanjutnya, karena didefinisikan $\lambda(\theta) = \theta(e)$ maka untuk $\lambda(\theta_1 - \theta_2) = 0$ diperoleh

$$(\theta_1 - \theta_2)e = 0 \text{ atau } \theta_1(e) - \theta_2(e) = 0. \text{ Akibatnya, } \theta_1(e) = \theta_2(e) \text{ atau } \theta_1 = \theta_2. \text{ Terbukti, } \lambda \text{ injektif.}$$

(iv) Akan ditunjukkan λ surjektif.

Diambil sebarang $\theta(e) \in M_R e$. Akan ditunjukkan terdapat $\theta \in \text{Hom}_R(eR, M_R)$ sehingga berlaku $\lambda(\theta) = \theta(e)$. Karena $\theta(e) = m = me = \lambda(\theta)$ maka akan selalu ditemukan $\theta \in \text{Hom}_R(eR, M_R)$ sehingga $\lambda(\theta) = \theta(e)$. Terbukti, λ surjektif.

Berdasarkan bukti (i)-(iv) terbukti bahwa

$$\text{Hom}_R(eR, M_R) \cong M_R e \quad \square$$

Berdasarkan Proposisi 5. diperoleh suatu akibat sebagai berikut.

Akibat 1.

Jika diberikan sebarang elemen idempoten e dan e' dalam suatu ring R maka $\text{Hom}_R(eR, e'R) \cong e'R e$.

Bukti: Pada Proposisi 5 telah dibuktikan bahwa terdapat suatu isomorfisma grup aditif $\lambda: \text{Hom}_R(eR, M_R) \rightarrow M_R e$ atau $\text{Hom}_R(eR, M_R) \cong M_R e$. Dengan asumsi $M_R = e'R$, maka diperoleh $\text{Hom}_R(eR, e'R) \cong e'R e$. \square

Dari Akibat 1 diperoleh suatu akibat sebagai berikut.

Akibat 2.

Untuk suatu idempoten $e \in R$ terdapat suatu isomorfisma ring, $\text{End}_R(eR) \cong eRe$.

Bukti: Diambil sebarang idempoten e dan e' dengan $e = e'$. Akan ditunjukkan $\text{End}_R(eR) \cong eRe$. Berdasarkan Akibat 1 $\text{Hom}_R(eR, e'R) \cong e'R e$. Jika diasumsikan elemen idempoten $e = e'$ maka diperoleh

$$\text{End}_R(eR) = \text{Hom}_R(eR, eR) \cong eRe.$$

Selanjutnya untuk suatu pemetaan $\theta: eR \rightarrow eR$ dengan definisi $\theta(er) = er, \forall r \in R$ serta mengingat Proposisi 5 yaitu $\theta(er) = m = me$ maka untuk suatu pemetaan $\lambda: \text{Hom}(eR, eR) \rightarrow eRe$ diperoleh

$$\lambda(\theta) = ere = \theta(er)e = me = m.$$

Dapat disimpulkan $m \in eRe$ yang artinya $me = m = em$. Akan dibuktikan λ homomorfisma ring. Diambil sebarang $\theta, \theta' \in \text{End}_R(eR)$ maka diperoleh:

$$(i) \quad \lambda(\theta + \theta') = (\theta + \theta')e = \theta(e) + \theta'(e) = \lambda(\theta) + \lambda(\theta')$$

$$(ii) \quad \lambda(\theta'\theta) = \theta'\theta(e) = \theta'(m) = \theta'(em) = \theta'(e)m \\ = \lambda(\theta')\lambda(\theta). \quad \square$$

Berikut ini didefinisikan elemen idempoten yang saling ortogonal dan diberikan beberapa sifat *indecomposable* dalam ring.

Definisi 6.

Dua elemen idempoten $\alpha, \beta \in R$ dikatakan saling ortogonal jika $\alpha\beta = \beta\alpha = 0$.

Definisi 7.

Suatu ring R disebut *indecomposable* jika ring tersebut tidak memiliki elemen idempoten *central* yang nontrivial atau dengan kata lain hanya 0 dan 1 yang merupakan elemen idempoten *central* dalam R .

Dari sifat ring *indecomposable*, idempoten *central* dan idempoten ortogonal, dapat didefinisikan elemen idempoten yang primitif, namun sebelumnya diberikan suatu proposisi yang mendasari pendefinisian tersebut.

Proposisi 7.

Untuk sebarang idempoten $e \in R$ yang tidak nol, maka beberapa pernyataan berikut ini ekuivalen.

1. eR *indecomposable* sebagai R -modul kanan.
 Re *indecomposable* sebagai R -modul kiri.
2. Ring eRe tidak memiliki idempoten yang non trivial.
3. Elemen e tidak dapat didekomposisikan ke dalam bentuk $\alpha + \beta$ dengan α, β adalah idempoten tidak nol yang saling ortogonal.

Bukti:

(1) \Leftrightarrow (2) Diketahui eR *indecomposable* sebagai R -modul kanan. Akan ditunjukkan ring eRe tidak memiliki idempoten yang nontrivial. Berdasarkan Akibat 2 $\text{End}_R(eR) \cong eRe$ maka ring eRe juga *indecomposable* dengan kata lain ring eRe tidak memiliki idempoten yang nontrivial. Dengan asumsi yang sama dibuktikan untuk pernyataan Re *indecomposable* sebagai R -modul kiri.

(2) \Rightarrow (3) Dibuktikan dengan kontradiksi. Andaikan $e = \alpha + \beta$ dengan α dan β idempoten tak nol yang saling ortogonal maka diperoleh $e\alpha = (\alpha + \beta)\alpha = \alpha^2 + \beta\alpha = \alpha + 0 = \alpha$ dan $e\beta = \alpha(\alpha + \beta) = \alpha^2 + \alpha\beta = \alpha + 0 = \alpha$. Diperoleh $\alpha \in eRe$ dan $\alpha \neq 0$ maka kontradiksi dengan (2) karena eRe memuat idempoten yang nontrivial. Pengandaian diingkari, terbukti $e \neq \alpha + \beta$ dengan α dan β idempoten tak nol yang saling ortogonal.

(3) \Rightarrow (2) Dibuktikan dengan kontradiksi. Diandaikan ring eRe memiliki idempoten α yang nontrivial sehingga untuk suatu komplemen idempoten dari α yaitu $\beta = e - \alpha$ dengan

$\beta \in eRe$, akan mempunyai suatu dekomposisi dari idempoten yang ortogonal yaitu $e = \alpha + \beta$. Akibatnya timbul kontradiksi dengan pernyataan (3), sehingga ring eRe tidak mempunyai elemen idempoten yang nontrivial. \square

Berdasarkan Proposisi 7 didefinisikan suatu idempoten primitif sebagai berikut.

Definisi 8.

Suatu elemen idempoten $e \neq 0$ disebut idempoten primitif dari R , jika memenuhi salah satu dari kondisi berikut ini

1. eR indecomposable sebagai R -modul kanan sedangkan Re indecomposable sebagai R -modul kiri.
2. Ring eRe tidak memiliki idempoten yang non trivial.
3. Elemen e tidak dapat didekomposisikan ke dalam bentuk $\alpha + \beta$ dengan α, β adalah idempoten tak nol yang saling ortogonal.

Selanjutnya, struktur $Jac(eRe)$ dan $\bar{e}\bar{R}\bar{e}$ dapat dipahami dengan memanfaatkan teorema homomorfisma ring

Teorema 1.

Diberikan suatu elemen idempotent e dalam R dan $J = Jac(R)$. Diperoleh $Jac(eRe) = J \cap (eRe) = eJe$ dan $eRe / Jac(eRe) \cong \bar{e}\bar{R}\bar{e}$.

Bukti: Diberikan elemen idempoten $e \in R$ dan $J = Jac(R)$.

Akan ditunjukkan:

1. $Jac(eRe) = J \cap (eRe) = eJe$
 2. $eRe / Jac(eRe) \cong \bar{e}\bar{R}\bar{e}$
1. Akan ditunjukkan $Jac(eRe) = J \cap (eRe) = eJe$. Dibuktikan dengan beberapa tahapan sebagai berikut:
- (i) $r \in Jac(eRe) \Rightarrow r \in J$,
 - (ii) $r \in J \cap (eRe) \Rightarrow r \in eJe$,
 - (iii) $r \in eJe \Rightarrow r \in Jac(eRe)$

Pembuktian seperti berikut:

- (i) Diambil sebarang $r \in Jac(eRe)$. Akan ditunjukkan $r \in J$. Berdasarkan Teorema 1 jika $r \in J = Jac(R)$ maka $1 - yr$ unit dalam R , untuk setiap $y \in R$. Dengan asumsi yang sama maka untuk setiap $r \in Jac(eRe)$ dan $y \in eRe$ berlaku $e - eye.r$ yang merupakan unit dalam eRe . Artinya untuk suatu $b \in eRe$ berlaku $b(e - eye.r) = e$, akibatnya $be(1 - ye.r) = e$. Karena $b \in eRe$ maka $be = b = eb$ sehingga berlaku $b(1 - yer) = e$. Mengingat $y \in eRe$ maka diperoleh $b(1 - yr) = e$. Di lain pihak, jika digandakan dengan yr dari ruas kiri pada

$b(1 - yr) = e$ diperoleh $yrb(1 - yr) = yre = yr$ akibatnya $yrb - yrb.yr = yr$. Diberikan

$$(1 + yrb)(1 - yr) \in R$$

maka berlaku

$$(1 + yrb)(1 - yr) = 1(1 - yr) + yrb(1 - yr) = 1 - yr + yr = 1.$$

Terbukti bahwa terdapat $1 + yrb \in R$ sehingga berlaku $(1 + yrb)(1 - yr) = 1$ atau dengan kata lain $1 - yr$ unit dalam R .

- (ii) Diambil sebarang $r \in J \cap eRe$. Akan ditunjukkan $r \in eJe$. Jika $r \in J \cap eRe$ yang artinya $r \in J$ dan $r \in eRe$ maka berlaku $r = ere$. Sedangkan di lain pihak telah diketahui bahwa $r \in J$ dan mengingat bahwa $J \subseteq R$ maka diperoleh $r = ere \in eJe$.

(iii) Diambil sebarang $r \in eJe \subseteq J$. Akan ditunjukkan $r \in Jac(eRe)$. Berdasarkan Teorema 1 yaitu untuk setiap $y \in eRe$ maka $e - yr$ merupakan unit dalam eRe . Di lain pihak karena $r \in eJe \subseteq J = Jac(R)$ maka $1 - yr$ merupakan unit dalam R , yang artinya terdapat suatu $x \in R$ sehingga berlaku $x(1 - yr) = 1$. Diperoleh $e = e.1.e = ex(1 - yr)e = ex(e - yre) = ex(e - yr) = ex(e^2 - eyr) = exe(e - yr)$.

Dengan kata lain $exe \in eRe$ adalah invers kiri dari $e - yr$ atau $e - yr$ unit di eRe .

2. Akan ditunjukkan $eRe / Jac(eRe) \cong \bar{e}\bar{R}\bar{e}$. Diberikan suatu pemetaan $\delta: eRe \rightarrow \bar{e}\bar{R}\bar{e}$ yang terdefinisi dengan $\delta(ere) = \bar{e}\bar{r}\bar{e}$. Suatu pemetaan δ merupakan homomorfisma ring dari eRe ke $\bar{e}\bar{R}\bar{e}$, yakni untuk sebarang $er_1e, er_2e \in eRe$ diperoleh :

$$(i) \delta(er_1e + er_2e) = \delta(e(r_1 + r_2)e) = \overline{\bar{e}(r_1 + r_2)\bar{e}} = \bar{e}(\bar{r}_1 + \bar{r}_2)\bar{e} = \bar{e}\bar{r}_1\bar{e} + \bar{e}\bar{r}_2\bar{e} = \delta(er_1e) + \delta(er_2e)$$

$$(ii) \delta(er_1e . er_2e) = \delta(er_1e^2r_2e) = \delta(er_1er_2e) = \delta(er_1r_2e) = \overline{\bar{e}(r_1.r_2)\bar{e}} = \bar{e}(\bar{r}_1.\bar{r}_2)\bar{e} = \bar{e}\bar{r}_1\bar{e} . \bar{e}\bar{r}_2\bar{e} = \delta(er_1e) . \delta(er_2e)$$

Di lain pihak $\delta: eRe \rightarrow \bar{e}\bar{R}\bar{e}$ juga merupakan suatu epimorfisma karena untuk setiap $\bar{e}\bar{r}\bar{e} \in \bar{e}\bar{R}\bar{e}$ dengan masing-masing \bar{e} dan \bar{r} adalah bayangan dari e dan r sehingga berlaku

$$\bar{e}\bar{r}\bar{e} = (e + J)(r + J)(e + J) = ere + J \in \bar{e}\bar{R}\bar{e}.$$

Hal ini berarti untuk setiap $\bar{e}\bar{r}\bar{e} \in \bar{e}\bar{R}\bar{e}$ dapat ditemukan $ere \in eRe$ sehingga berlaku

$\delta(ere) = \bar{e}\bar{r}\bar{e}$. Diperoleh, untuk setiap $ere \in eRe$ berlaku

$$\text{Im}(\delta) = \{ \bar{e}\bar{r}\bar{e} \in \bar{e}\bar{R}\bar{e} \mid \delta(ere) = \bar{e}\bar{r}\bar{e} \} = \bar{e}\bar{R}\bar{e}$$

dan

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\delta) &= \{ ere \in eRe \mid \delta(ere) = \bar{0} \} \\ &= \{ ere \in eRe \mid \bar{e}\bar{r}\bar{e} = \bar{0} \} \\ &= \{ ere \in eRe \mid ere + J = 0 + J \}. \end{aligned}$$

Jika $eRe \in J$ dan $ere \in eRe$ maka $ere \in J \cap eRe$.

Selanjutnya, mengingat bukti (1.i) dan (1.ii), jika $J \cap (eRe) = eJe$ maka $ere \in eJe$ dan $\text{Ker}(\delta) = eJe = \text{rad}(eRe)$. Dengan mengingat teorema utama homomorfisma ring diperoleh

$$eRe / \text{Ker}(\delta) \cong \text{Im}(\delta).$$

Terbukti $eRe / \text{Jac}(eRe) \cong \bar{e}\bar{R}\bar{e}$. \square

Berikut ini diberikan proposisi yang mendasari definisi isomorfisma antara dua elemen idempoten dalam suatu ring R .

Proposisi 8.

Diberikan elemen idempoten $e, f \in R$, maka pernyataan-pernyataan berikut ini ekuivalen

1. $eR \cong fR$ sebagai R -modul kanan.
 $Re \cong Rf$ sebagai R -modul kiri.
2. Terdapat elemen $a \in eRf$ dan $b \in fRe$ sedemikian sehingga $e = ab$ dan $f = ba$.
3. Terdapat elemen $a, b \in R$ sedemikian sehingga $e = ab$ dan $f = ba$.

Bukti:

1 \Rightarrow 2 Diberikan $Re \cong Rf$ sebagai modul kanan atas R .

Akan ditunjukkan $e = ab$ dan $f = ba$.

Berdasarkan Proposisi 5, untuk sebarang elemen idempoten e dan f , dengan $eR \cong fR$ dapat ditemukan suatu isomorfisma $\theta: eR \rightarrow fR$ atau $\text{Hom}_R(eR, fR) \cong fRe$ dengan definisi $\theta(e) = b \in fRe$. Sebaliknya untuk suatu pemetaan invers $\theta^{-1}: fR \rightarrow eR$ atau $\text{Hom}_R(fR, eR) \cong eRf$ didefinisikan $\theta^{-1}(f) = a \in eRf$. Karena $b \in fRe$ dengan f, e yang juga merupakan elemen satuan maka berlaku $fb = b = be$ dan untuk setiap $a \in eRf$ berlaku $ea = a = af$ diperoleh

$$\begin{aligned} (\theta^{-1}\theta)(e) &= \theta^{-1}(\theta(e)) = \theta^{-1}(b) = \theta^{-1}(fb) \\ &= \theta^{-1}(f)b = ab, \end{aligned}$$

$$\theta(\theta^{-1}(f)) = \theta(a) = \theta(ea) = \theta(e)a = ba.$$

Dari hasil komposisi, elemen e dipetakan ke ab dan elemen f dipetakan ke ba . Karena $\theta^{-1}\theta = 1$ dan $\theta\theta^{-1} = 1$ maka terbukti $e = ab$ dan $f = ba$.

Bukti $Re \cong Rf$ sebagai R -modul kiri dikerjakan secara analog dengan asumsi $Re \cong Rf$ sebagai modul kiri atas R .

2 \Rightarrow 3 Pernyataan 2 dan 3 adalah pernyataan yang trivial.

3 \Rightarrow 1 Diberikan $a, b \in R$ dengan $e = ab$ dan $f = ba$. Akan ditunjukkan $eR \cong fR$ sebagai modul kanan atas R .

Dipunyai $be = b(ab) = (ba)b = fb \in fR$ dan $af = a(ba) = (ab)a = ea \in eR$.

Selanjutnya, didefinisikan $\theta: eR \rightarrow fR$ dengan $\theta(e) = b \in fR$ sehingga untuk setiap $x \in eR$ diperoleh $\theta(x) = \theta(ex) = \theta(e)x = bx \in fR$.

Didefinisikan juga $\theta^{-1}: fR \rightarrow eR$ dengan $\theta^{-1}(f) = a \in eR$ sehingga untuk setiap $y \in eR$

berlaku $\theta^{-1}(y) = \theta^{-1}(fy) = \theta^{-1}(f)y = ay \in eR$.

Karena $\theta(e) = b = fb = be$

dan $\theta^{-1}(f) = a = ea = af$

diperoleh $\theta^{-1}\theta(e) = \theta^{-1}(\theta(e)) = \theta^{-1}(be)$

$$= a(be) = (ab)e = ee = e^2 = e$$

dan $\theta\theta^{-1}(f) = \theta(\theta^{-1}(f)) = \theta(af) = b(af)$

$$= (ba)f = ff = f^2 = f.$$

Karena $\theta\theta^{-1} = 1$ dan $\theta^{-1}\theta = 1$,

terbukti $eR \cong fR$. \square

Berdasarkan Proposisi 8 dapat didefinisikan isomorfisma antara dua elemen idempoten dalam R sebagai berikut.

Definisi 9.

Elemen idempoten e dikatakan saling isomorfisma dengan idempoten f (dinotasikan $e \cong f$) jika memenuhi salah satu dari kondisi berikut ini.

1. $eR \cong fR$ sebagai modul kanan atas R sedangkan $Re \cong Rf$ sebagai modul kiri atas R .
2. Terdapat elemen $a \in eRf$ dan $b \in fRe$ sedemikian sehingga $e = ab$ dan $f = ba$.
3. Terdapat elemen $a, b \in R$ sedemikian sehingga $e = ab$ dan $f = ba$.

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan maka dapat disimpulkan bahwa beberapa karakteristik dari elemen idempotent *central* adalah sebagai berikut:

1. Syarat perlu dan cukup suatu elemen idempoten e merupakan idempoten *central* adalah

$$eRf = fRe = \{0\}.$$

2. Jika diberikan sebarang elemen idempoten e dan e' dalam suatu ring R dan M_R modul kanan atas ring R maka terdapat suatu isomorfisma grup aditif

$$\lambda: \text{Hom}_R(eR, M_R) \rightarrow M_R e.$$

4. Untuk sebarang idempoten $e \in R$ yang tidak nol, maka beberapa pernyataan berikut ini ekuivalen yaitu $eR (Re)$ indecomposable sebagai R -modul kanan (R -modul kiri), ring eRe tidak memiliki idempoten yang non trivial, elemen e tidak dapat didekomposisikan ke dalam bentuk $\alpha + \beta$ dengan α, β adalah idempoten tidak nol yang saling ortogonal.
5. Jika diberikan suatu elemen idempoten e dalam R dan $J = \text{Jac}(R)$ maka diperoleh $\text{Jac}(eRe) = J \cap (eRe) = eJe$ dan $eRe / \text{Jac}(eRe) \cong \bar{e} \bar{R} \bar{e}$.
6. Untuk sebarang elemen idempoten $e, f \in R$, maka beberapa pernyataan berikut ini ekuivalen yaitu: $eR \cong fR (Re \cong Rf)$ sebagai R -modul kanan (R -modul kiri), terdapat elemen $a \in eRf$ dan $b \in fRe$ sedemikian sehingga $e = ab$ dan $f = ba$, terdapat elemen $a, b \in R$ sehingga $e = ab$ dan $f = ba$.

DAFTAR PUSTAKA

- Anderson, W. dan Fuller, K., 1992, *Ring and Categories of Modules*, Springer Verlag, New York.
- Lam, T.Y., 1991, *A First Course in Noncommutative Rings*, Springer Verlag, New York.
- Malik, D.S., Mordeson, J. M., dan Sen, M. K., 1997, *Fundamentals of Abstract Algebra*, The McGraw-Hill Companies, Inc, New York.