IDENTIFIKASI RING DENGAN SIFAT *UNIQUELY MORPHIC*

Henry Willyam Michel Patty dan Zeth Arthur Leleury
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Pattimura
Jln. Ir. M. Putuhena, Kampus Poka Ambon
henry_4t00@yahoo.com, zaleleury@yahoo.co.id

ABSTRACT

A ring *R* is said have the property left morphic if for each $a \in R$, $R/Ra \cong l(a)$ or equivalently there exists $b \in R$ such that $Ra = l(b)$ and $l(a) = Rb$, where $l(a)$ dan $l(b)$ denote the left annihilators *a* and *b* in *R*, respectively. Motivated by the left morphic properties, so that will be investigated a rings *R* satisfying uniquely morphic properties, i.e. for each $0 \neq a \in R$ there exists a unique $b \in R$ such that $Ra = l(b)$ and $l(a) = Rb$. In this paper, it will be identified and studied the properties of uniquely morphic rings.

Keywords: annihilator, left morphic, uniquely morphic

PENDAHULUAN

Konsep ring dengan sifat *uniquely morphic* dimotivasi dari suatu kenyataan bahwa jika diberikan suatu ring asosiatif dengan elemen satuan, *R* dan terdapat suatu fungsi: $f_a : R \to R$ yang didefinisikan $x \to f_a(x) = xa$, dimana $Ker(f_a) = \{x \in R \mid f_a(x) = 0\}$ $= \{x \in R \mid xa = 0\}$ $= l(a)$ dengan $l(a) = Ann^l(a)$ dan $\mathrm{Im}(f_a) = \{xa \mid x \in R\} = Ra$. Selanjutnya Menurut Teorema Utama Homomorfisma

$$R/Ker(f_a) \cong \mathrm{Im}(f_a) \quad \text{atau} \quad R/l(a) \cong Ra$$

maka dapat dibentuk dual dari $R/l(a) \cong Ra$ yaitu $R/Ra \cong l(a)$

Suatu elemen $a \in R$ disebut *left morphic* jika $R/Ra \cong l(a)$ atau ekuivalen dengan menyatakan bahwa jika terdapat suatu elemen $b \in R$ sedemikian hingga $Ra = l(b)$ dan $l(a) = Rb$. Suatu ring *R* disebut *left morphic* jika setiap elemennya *left morphic*. Dimotivasi dari konsep tersebut dikembangkan suatu ring yang memenuhi sifat untuk setiap $0 \neq a \in R$ terdapat dengan tunggal suatu $b \in R$ sedemikian hingga $Ra = l(b)$ dan $l(a) = Rb$. Ring inilah yang disebut ring dengan sifat *uniquely morphic* [1]. Dalam tulisan ini akan diidentifikasi ring yang mempunyai sifat *uniquely morphic* dan dibahas beberapa sifatnya.

Semua ring yang dibicarakan di sini adalah ring asosiatif dengan elemen satuan. Selanjutnya $a \overset{L}{\square} b$ menyatakan ring dengan sifat *left morphic,* $U(R)$ dan $J(R)$ berturut-turut menyatakan grup unit dan radikal Jacobson dari *R,* $\mathbf{Z}_n$ menyatakan bilangan bulat modulo *n* dan $\mathbf{M}_n(R)$ menyatakan matriks berukuran $n \times n$ atas *R*.

METODE

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi pustaka yaitu dengan mempelajari literatur yang berkaitan dengan ring dan modul. Secara ringkas langkah-langkah yang digunakan adalah sebagai berikut:

1. Mempelajari sifat-sifat dalam struktur aljabar ring yang mendasari identifikasi ring dengan sifat *uniquely morphic*.
2. Menyelidiki sifat-sifat ring *uniquely morphic* dengan meninjau kembali sifat-sifat ring yang telah diketahui sebelumnya

HASIL DAN PEMBAHASAN

Definisi dan Sifat-sifat Ring dengan Sifat *Left Morphic*.

Berikut akan ditinjau definisi suatu ring dengan sifat *left morphic* yang mendasari definisi ring dengan sifat *uniquely morphic*.
Diberikan pengertian dari annihilator kiri dan kanan dalam suatu ring *R* sebagai berikut.

Definisi 3.1.1. *Misalkan* $A \subset R$. *Annihilator kiri dari A yaitu* $ann_l(A) = l(A)$ $= \{r \in R \mid ra = 0, \forall a \in A\}$ *dan annihilator kanan dari A yaitu* $ann_r(A) = r(A) = \{r \in R \mid ar = 0, \forall a \in A\}$.

Berikut ini diberikan suatu sifat yang memotivasi pendefinisian elemen *left morphic* dari suatu ring *R*

Proposisi 3.1.2. *Jika* $a = ue$ *dengan* $u \in U(R)$ *dan* $e^2 = e \in R$ *maka berlaku*

1. $a = asa$ untuk suatu $s \in R$
2. $R/Ra \cong l(a)$ sebagai R-modul kiri.

Bukti:

Diketahui $a = ue$ dengan $u \in U(R)$ dan $e^2 = e \in R$. Akan ditunjukkan (1) $a = asa$ untuk suatu $s \in R$ (2) $R/Ra \cong l(a)$ sebagai *R*-modul kiri.

1. Karena $u \in U(R)$ maka terdapat $u^{-1} \in R$ sehingga berlaku $u^{-1}a = u^{-1}ue = e$. Selanjutnya karena *e* elemen idempoten di *R* dan $e = u^{-1}a$ maka berlaku $(u^{-1}a)(u^{-1}a) = (u^{-1}a)$ yang ekuivalen dengan $u^{-1}(au^{-1}a) = u^{-1}a$.
   Karena $0 \neq u^{-1} \in R$ maka berlaku $au^{-1}a = a$. Terbukti, $a = asa$ untuk suatu $s = u^{-1} \in R$.
2. Karena $a = ue$ maka $Ra = Rue$. Untuk suatu $u^{-1} \in R$ diperoleh $u^{-1}a = u^{-1}ue = 1.e$ atau ekuivalen dengan menyatakan $Ra = Rue = Re$.
   Karena ring Re merupakan jumlahan langsung dari suatu ring ${}_RR$ atau ${}_RR = Re + R(1-e)$ .Diperoleh: $l(a) = \{x \in R \mid xa = 0\} = \{x \in R \mid xue = 0\} = \{x \in R \mid xu \in l(e)\} = \{x \in R \mid xu \in (1-e)R\}$ $= u^{-1}(1-e)R$. Dapat disimpulkan $l(a) \cong R(1-e)$. Dilain pihak, karena $R(1-e) \cong R/Re$ sebagai *R*-modul kiri dan $Ra = Re$ maka $l(a) \cong R(1-e) \cong R/Re \cong R/Ra$. Terbukti $l(a) \cong R/Ra$ sebagai *R*-modul kiri.

Berdasarkan Proposisi 3.1.2, dapat didefinisikan suatu elemen *left morphic* dalam suatu ring *R* sebagai berikut.

Definisi 3.1.3. [1] *Misalkan R ring dan terdapat suatu elemen* $a \in R$. *Elemen* $a \in R$ *disebut left morphic (dinotasikan LM) jika* $R/Ra \cong l(a)$. *Jika setiap elemen dalam ring R bersifat left morphic maka R disebut ring dengan sifat left morphic.*

Berikut ini diberikan suatu sifat yang akan memotivasi pendefinisian elemen *left morphic,* selain yang disebutkan pada Definisi 3.1.3.

Proposisi 3.1.4. *Misalkan ring R ring dan* $a \in R$ *maka beberapa pernyataan berikut ini ekuivalen*:

1. *Elemen* $a \in R$ *left morphic yaitu* $R/Ra \cong l(a)$.

2. *Terdapat suatu elemen* $b \in R$ *sedemikian sehingga* $Ra = l(b)$ *dan* $l(a) = Rb$.
3. *Terdapat suatu elemen* $b \in R$ *sedemikian sehingga* $Ra = l(b)$ *dan* $l(a) \cong Rb$.

Bukti:

$1 \Rightarrow 2$ Diberikan suatu pemetaan $\sigma : R/Ra \to l(a)$. Misalkan untuk $1 + Ra \in R/Ra$ didefinisikan $\sigma(1 + Ra) = b$. Akan ditunjukkan $Rb = l(a)$ dan $Ra = l(b)$.

(i) Akan ditunjukkan $Rb = l(a)$.

Diketahui $\sigma : R/Ra \to l(a)$ dengan σ suatu epimorfisma maka diperoleh $\mathrm{Im}(\sigma) = l(a)$ sehingga cukup ditunjukkan $\mathrm{Im}(\sigma) = Rb$.

Diambil sebarang $y \in \mathrm{Im}(\sigma)$ artinya $y = \sigma(r + Ra)$ untuk suatu $r + Ra \in R/Ra$. Akan ditunjukkan $y \in Rb$ artinya $y = rb$ untuk suatu $r \in R$. Diperoleh $y = \sigma(r + Ra) = \sigma(r.1 + Ra) = r.\sigma(1 + Ra) = rb$. Telah ditunjukkan untuk sebarang $y \in \mathrm{Im}(\sigma)$ diperoleh $y \in Rb$ atau dengan kata lain $\mathrm{Im}(\sigma) \subseteq Rb$.

Sebaliknya, diambil sebarang $z \in Rb$ maka berlaku $z = rb$ untuk suatu $r \in R$. Akan ditunjukkan $z \in \mathrm{Im}(\sigma)$ artinya $z = \sigma(r + Ra)$ untuk suatu $r + Ra \in R/Ra$. Ditunjukkan dengan menggunakan sifat kontradiksi. Diandaikan $z \neq \sigma(r + Ra)$. Di lain pihak, karena $\sigma(r + Ra) = rb$ maka berlaku $z \neq rb$. Timbul kontradiksi, pengandaian diingkari, terbukti $z \in \mathrm{Im}(\sigma)$. Jadi, telah ditunjukkan untuk sebarang $z \in Rb$ diperoleh $z \in \mathrm{Im}(\sigma)$ atau dengan kata lain $Rb \subseteq \mathrm{Im}(\sigma)$. Karena diperoleh $\mathrm{Im}(\sigma) \subseteq Rb$ dan $Rb \subseteq \mathrm{Im}(\sigma)$ maka $\mathrm{Im}(\sigma) = Rb$. Di lain pihak mengingat $\mathrm{Im}(\sigma) = l(a)$ maka terbukti $Rb = l(a)$

(ii) Akan ditunjukkan $l(a) = Rb$.

Diketahui $\sigma : R/Ra \to l(a)$ dengan σ suatu monomorfisma maka berlaku $Ker(\sigma) = Ra = \{0\}$. Jadi, cukup ditunjukkan $Ker(\sigma) = l(b)$. Diambil sebarang $x \in l(b)$ maka $xb = 0$. Mengingat $0 \neq b = \sigma(1 + Ra)$ maka $x\sigma(1 + Ra) = 0$. Hal ini berarti $x = 0$ atau dengan kata lain $l(b) = 0$. Telah ditunjukkan $Ker(\sigma) = Ra = 0 = l(b)$ atau $Ra = l(b)$

$2 \Rightarrow 3$ Trivial, karena $l(a) = Rb$ berarti jelas bahwa $l(a) \cong Rb$.

$3 \Rightarrow 1$ Karena $Ra = l(b)$ maka berlaku $R/Ra \cong R/l(b)$. Selanjutnya, menurut Teorema Utama Homomorfisma ring $R/l(b) \cong Rb$ dan di lain pihak diketahui $Rb \cong l(a)$. Jadi $R/Ra \cong l(a)$. □

Berdasarkan Proposisi 3.1.4. dapat didefinisikan ring dengan sifat *left morphic* sebagai berikut

Definisi 3.1.5. [1] *Suatu ring R disebut ring dengan sifat left morphic (dinotasikan R:LM) jika untuk setiap elemen* $a \in R$, *terdapat elemen* $b \in R$, *sedemikian sehingga* $Ra = l(b)$ *dan* $l(a) = Rb$.

Dalam suatu ring *R*, pergandaan antara elemen unit dan sebarang elemen *LM* akan menghasilkan elemen *LM,* seperti yang ditunjukkan dalam proposisi berikut.

Proposisi 3.1.6. [1] *Jika a adalah elemen dengan sifat left morphic dalam suatu ring R maka ua dan au juga merupakan elemen left morphic untuk setiap unit u dalam R.*

Bukti: Jika diberikan $a \in R$ yang merupakan elemen dengan sifat *LM* maka terdapat suatu $b \in R$ sehingga berlaku $Ra = l(b)$ dan $l(a) = Rb$. Didefinisikan $Rua = \{xua \mid x \in R\}$ untuk suatu

$u \in U(R)$. Jika $x \in R$ dan $u \in U(R) \subset R$ maka berlaku $xu \in R$, katakanlah $xu = y \in R$. Akibatnya $Rua = \{xua \mid x \in R\} = \{ya \mid y = xu \in R\} = Ra$. Dipunyai $l(b) = \{x \in R \mid xb = 0\}$. Diambil sebarang $x \in l(b)$ artinya $xb = 0$ untuk suatu $b \in R$. Jika digandakan dengan elemen u^{-1} dari kanan pada $xb = 0$ maka diperoleh $xbu^{-1} = 0$. Jelas bahwa untuk suatu $u^{-1} \in R$ berlaku $l(b) = \{x \in R \mid xb = 0\} = \{x \in R \mid xbu^{-1} = 0\} = l(bu^{-1})$. Terbukti $l(b) = l(bu^{-1})$. Karena $Ra = l(b)$ maka diperoleh

$$Rua = Ra = l(b) = l(bu^{-1}). \tag{3.1}$$

Diketahui $Rb = l(a)$. Jika digandakan dengan $u^{-1} \in R$ dari kanan pada $Rb = l(a)$ maka diperoleh $Rbu^{-1} = l(a)u^{-1}$. Diambil sebarang $x \in l(a)u^{-1}$ artinya $x = yu^{-1}$ untuk suatu $y \in l(a)$. Jika digandakan dengan $u \in U(R)$ maka diperoleh $xu = yu^{-1}u = y$. Jadi, $xu \in l(a)$ yang ekuivalen dengan $xua = 0$ atau $x \in l(ua)$. Diperoleh untuk sebarang $x \in l(a)u^{-1}$ berlaku $x \in l(ua)$ atau dengan kata lain $l(a)u^{-1} \subset l(ua)$. Dengan cara yang analog dapat dibuktikan $l(ua) \subset l(a)u^{-1}$ sehingga diperoleh $l(a)u^{-1} = l(ua)$. Dengan demikian

$$Rbu^{-1} = l(a)u^{-1} = l(ua). \tag{3.2}$$

Dari (3.1) dan (3.2) terbukti *ua* merupakan elemen *LM* dalam *R*. Selanjutnya, karena $Ra = l(b)$ maka untuk suatu $u \in R$, yang digandakan dari kanan pada $Ra = l(b)$, diperoleh $Rau = l(b)u$. Diperhatikan bahwa untuk sebarang $y \in l(b)u$ berlaku $yu^{-1} \in l(b)$, yang artinya $yu^{-1}b = 0$ atau ekuivalen dengan menyatakan $y \in l(u^{-1}b)$. Karena untuk sebarang $y \in l(b)u$ diperoleh $y \in l(u^{-1}b)$ maka berlaku $l(b)u \subset l(u^{-1}b)$. Analog untuk bukti $l(u^{-1}b) \subset l(b)u$ sehingga diperoleh $l(u^{-1}b) = l(b)u$. Diperoleh

$$Rau = l(b)u = l(u^{-1}b). \tag{3.3}$$

Karena $Ru^{-1}b = \{xu^{-1}b \mid x \in R\} = \{zb \mid z = xu^{-1} \in R\} = Rb$ maka $Ru^{-1}b = Rb = l(a)$. Di lain pihak jika diambil sebarang $x \in l(a)$ maka berlaku $xa = 0$. Jika digandakan dengan $u \in U(R)$ diperoleh $xau = 0$. Hal ini berarti $x \in l(au)$. Karena untuk sebarang $x \in l(a)$ diperoleh $x \in l(au)$ maka berlaku $l(a) \subset l(au)$. Sebaliknya, jika diambil sebarang $y \in l(au)$ maka $yau = 0$. Mengingat *u* unit dalam *R* maka terdapat $u^{-1} \in R$ sehingga berlaku $yauu^{-1} = 0$ atau dengan kata lain $ya = 0$. Hal ini berarti $y \in l(a)$. Karena untuk sebarang $y \in l(au)$ diperoleh $y \in l(a)$ maka berlaku $l(au) \subset l(a)$. Terbukti $l(a) = l(au)$.
Diperoleh

$$Ru^{-1}b = Rb = l(a) = l(au). \tag{3.4}$$

Dari (3.3) dan (3.4) terbukti *au* merupakan elemen *LM* dalam *R*. □
Berikut ini didefinisikan suatu relasi dalam ring *R* sebagai berikut.
Definisi 3.1.7. [1] *Suatu elemen $a \in R$ dikatakan berelasi dengan $b \in R$ (dinotasikan $a \sim b$), jika $Ra = l(b)$ dan $l(a) = Rb$.*

Selanjutnya dalam pembahasan ini, notasi $a \sim b$ berarti $Ra = l(b)$ dan $l(a) = Rb$. Berikut ini, diberikan suatu proposisi yang menjelaskan hubungan antara ring Boolean dengan ring dengan sifat *left morphic* .
Proposisi 3.1.8. [1] *Dalam suatu ring R, kedua pernyataan berikut ini ekuivalen:*
1. *R ring Boolean.*
2. *Untuk setiap $a \in R$ terdapat dengan tunggal $b \in R$ sedemikian sehingga $Ra = l(b)$ dan $l(a) = Rb$*

Bukti:

$1 \Rightarrow 2$: Diambil sebarang $a \in R$ dengan R ring Boolean maka berlaku $a^2 = a$. Akan ditunjukkan terdapat dengan tunggal $b \in R$ sehingga berlaku $Ra = l(b)$ dan $l(a) = Rb$. Karena $a \in R$ idempotent maka berlaku $(1-a)^2 = (1-a)(1-a) = 1-a-a+a^2$ $= 1-a-a+a = 1-a \in R$. Artinya $1-a$ juga merupakan elemen idempotent di R. Akan ditunjukkan terlebih dahulu bahwa $a \sim 1-a$.

a) Diambil sebarang $x \in R(1-a)$ dengan $x = r(1-a)$, untuk suatu $r \in R$. Akan ditunjukkan $x \in l(a)$ yang artinya $xa = 0$ untuk suatu $a \in R$. Jika $x = r(1-a)$ yang digandakan dengan $a \in R$ dari kanan maka diperoleh $xa = r(1-a)a = ra - ra^2$ $= ra - ra = 0$, dengan kata lain $x \in l(a)$. Karena untuk sebarang $x \in R(1-a)$ diperoleh $x \in l(a)$ maka berlaku $R(1-a) \subseteq l(a)$.

b) Diambil sebarang $y \in l(a)$ yang artinya $ya = 0$ untuk suatu $a \in R$. Akan ditunjukkan $y \in R(1-a)$, artinya $y = r(1-a)$ untuk suatu $r \in R$. Ditunjukkan dengan menggunakan sifat kontradiksi. Diandaikan $y \neq r(1-a)$. Untuk suatu $a \in R$ yang digandakan dari kanan pada ketidaksamaan $y \neq r(1-a)$ maka diperoleh $ya \neq r(1-a)a$. Di lain pihak $r(1-a)a = ra - ra^2 = ra - ra = 0$ maka berlkau $ya \neq 0$. Timbul kontradiksi, pengandaian diingkari, terbukti $y = r(1-a)$. Karena untuk sebarang $y \in l(a)$ diperoleh $y \in R(1-a)$ maka $l(a) \subseteq R(1-a)$.

Dari bukti (a) dan (b), berlaku $l(a) = R(1-a)$.

c) Jika diambil sebarang $x \in Ra$ maka $x = ra$, untuk suatu $r \in R$. Akan ditunjukkan $x \in l(1-a)$. Dengan cara yang analog dengan bukti (a) diperoleh $Ra \subseteq l(1-a)$.

d) Jika diambil sebarang $y \in l(1-a)$ maka $y(1-a) = 0$. Akan ditunjukkan $y \in Ra$, artinya $y = ra$ untuk suatu $r \in R$. Dengan cara yang analog dengan bukti (b) maka diperoleh $l(1-a) \subseteq Ra$.

Berdasarkan bukti (c) dan (d), terbukti $Ra = l(1-a)$. Selanjutnya, karena telah ditunjukkan $l(a) = R(1-a)$ dan $Ra = l(1-a)$ maka terbukti $a \sim 1-a$.

Diasumsikan $a \sim b$, untuk suatu $b \in R$. Hal ini berarti $Ra = l(b)$ dan $l(a) = Rb$. Karena $l(a) = R(1-a)$ dan $Ra = l(1-a)$ maka berlaku $Rb = l(a) = R(1-a)$ dan $l(b) = Ra = l(1-a)$. Jika diambil sebarang $b \in Rb = R(1-a)$, dengan R ring Boolean maka berlaku $b = bb$ $= b(1-a)$. Selanjutnya untuk sebarang $(1-a) \in R(1-a) = Rb$, berlaku $(1-a)$ $= (1-a)(1-a) = (1-a)b$. Berdasarkan, Proposisi [2] diperoleh $b(1-a) = (1-a)b$ sehingga berlaku $b = b(1-a) = (1-a)b = 1-a$. Karena $a \sim b$ dan $a \sim 1-a$, serta telah dibuktikan $b = 1-a$ maka b terjamin tunggal, sehingga $Ra = l(b)$ dan $l(a) = Rb$.

$2 \Rightarrow 1$: Diketahui untuk setiap $a \in R$, terdapat dengan tunggal $b \in R$ sedemikian sehingga $Ra = l(b)$ dan $l(a) = Rb$.

Akan ditunjukkan R ring Boolean. Jika diambil $0 \in R$, maka terdapat $1 \in R$ sehinga berlaku : $R0 = \{x0 \mid x \in R\} = 0$, $R1 = \{x1 \mid x \in R\} = R$ $l(0) = \{y \in R \mid y0 = 0\} = R$, $l(1)$ $= \{y \in R \mid y1 = 0\} = 0$ Dari hasil tersebut, terbukti $R0 = l(1)$ dan $l(0) = R1$ dengan kata lain $0 \sim 1$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $0 \sim u$ untuk suatu $u \in U(R) \subseteq R$.

a) Diambil sebarang $x \in R0$ dengan $x = r0$ untuk suatu $r \in R$. Akan ditunjukkan $x \in l(u)$ yang artinya $xu = 0$. Jika $x = r0$ maka untuk suatu $u \in U(R)$ diperoleh $xu = r0.u = 0$. Jadi, untuk sebarang $x \in R0$ diperoleh $x \in l(u)$, terbukti $R0 \subseteq l(u)$.

b) Jika diambil sebarang $y \in l(u)$ maka $yu = 0$ untuk suatu $u \in U(R)$. Akan ditunjukkan $y \in R0$, yang artinya $y = r0$ untuk suatu $r \in R$. Ditunjukkan dengan menggunakan sifat kontradiksi. Diandaikan $y \neq r0$. Untuk suatu $u \in U(R)$ yang digandakan dari kanan pada ketidaksamaan $y \neq r0$ maka diperoleh $yu \neq r0.u$ atau dengan kata lain $yu \neq 0$. Timbul kontradiksi, pengandaian diingkari, terbukti $y \in R0$ Jadi, untuk sebarang $y \in l(u)$ diperoleh $y \in R0$, terbukti $l(u) \subseteq R0$.
   Berdasarkan bukti (a) dan (b) terbukti $R0 = l(u)$

c) Diambil sebarang $x \in Ru$ dengan $x = ru$ untuk suatu $r \in R$. Akan ditunjukkan $x \in l(0)$. Dengan cara yang analog dengan bukti (a) maka diperoleh $Ru \subseteq l(0)$

d) Diambil sebarang $y \in l(0)$ dengan $y0 = 0$. Akan ditunjukkan $y \in Ru$ artinya $y = ru$ untuk suatu $r \in R$. Dengan cara yang analog dengan bukti (b) maka diperoleh $l(0) \subseteq Ru$.

Dari bukti (c) dan (d) terbukti $l(0) = Ru$. Hal ini berarti untuk $Ru = l(0)$ dan $l(0) = Ru$ diperoleh $0 \sim u$. Karena $0 \sim 1$ dan $0 \sim u$ serta mengingat sifat ketunggalan $b \in R$ maka $u = 1$ atau $U(R) = \{1\}$. Di lain pihak, karena hanya 0 satu-satunya elemen nilpoten dalam *R* maka *R* merupakan ring tereduksi. Oleh karena itu untuk sebarang $a \in R$ dengan *R* merupakan ring tereduksi diperoleh annihilator kanan $r(a) = \{x \in R \mid ax = 0\}$ dan $r(a^2) = \{x \in R \mid a^2 y = 0\}$. Diambil sebarang $m \in r(a)$ dan $n \in r(a^2)$ dengan $am = 0$ dan $a^2 n = 0$. Karena *R* ring tereduksi maka $am = 0$ dan $a^2 n = 0$ akan dipenuhi untuk $m = a = n$. Akibatnya, untuk setiap $a \in R$ diperoleh $r(a) = r(a^2)$. Di lain pihak dengan mengingat bahwa setiap annihilator kiri juga merupakan ideal kiri di *R* maka akan ditunjukkan $Ra = l\,r(a)$ dan $Ra^2 = l\,r(a^2)$.

e) Diambil sebarang $x \in Ra$ dengan $x = ra$ untuk suatu $r \in R$. Akan ditunjukkan $x \in l\,r(a)$, artinya $xy = 0$ untuk suatu $y \in r(a)$ dengan $ay = 0$. Karena $x = ra$ maka untuk suatu $y \in R$ diperoleh $xy = ray = r(ay) = r.0 = 0$. Jadi, untuk sebarang $x \in Ra$ diperoleh $x \in l\,r(a)$ atau dengan kata lain $Ra \subseteq l\,r(a)$ .Sebaliknya, diambil sebarang $y \in l\,r(a)$ dengan $yz = 0$ untuk suatu $z \in r(a)$ dengan aturan $az = 0$. Akan ditunjukkan $y \in Ra$. Karena $yz = 0 = az$ maka diperoleh $yz = az$. Hal ini berarti $yz - az = 0$ atau $(y-a)z = 0$. Jika $(y-a)z = 0$ maka diperoleh $y - a = 0$ atau $z = 0$.

Terbukti $y = a \in Ra$. Jadi, untuk sebarang $y \in l\,r(a)$ diperoleh $y = a \in Ra$ atau dengan kata lain $l\,r(a) \subseteq Ra$. Selanjutnya, karena $Ra \subseteq l\,r(a)$ dan $l\,r(a) \subseteq Ra$ maka berlaku $Ra = l\,r(a)$.

f) Dengan cara yang analog seperti bukti e) maka diperoleh $Ra^2 = l\,r(a^2)$.

Berdasarkan bukti e) dan f) serta mengingat $r(a) = r(a^2)$ dan $l\,r(a) = l\,r(a^2)$ maka dapat dinyatakan $Ra = l\,r(a) = l\,r(a^2) = Ra^2$. Hal ini berarti untuk sebarang $a \in Ra$ diperoleh $a \in Ra^2$. Dengan demikian *R* merupakan ring reguler kuat yang artinya setiap elemen dalam *R* dapat dinyatakan sebagai pergandaan unit dan elemen idempoten. Karena $U(R) = \{1\}$ maka $a = 1a^2$ atau dengan kata lain $a = a^2$. Terbukti *R* merupakan ring Boolean.

3.2. Definisi dan Sifat Ring dengan Sifat *Uniquely Morphic*

Dalam suatu ring *R* dengan sifat *left morphic* jika diambil sebarang $a \in R$, akan terdapat suatu $b \in R$ sedemikian sehingga $a \sim b$. Untuk suatu kondisi khusus yaitu jika diambil sebarang $0 \neq a \in R$ maka terdapat dengan tunggal $b \in R$ sedemikian sehingga $a \sim b$. Hal inilah yang menjadi motivasi untuk mendefinisikan ring dengan sifat *uniquely morphic*.

Definisi 3.2.1. [1] *Suatu ring R disebut ring dengan sifat uniquely morphic (dinotasikan R:UM) jika untuk setiap* $0 \neq a \in R$*, terdapat dengan tunggal* $b \in R$*, sedemikian sehingga* $Ra = l(b)$ *dan* $l(a) = Rb$.

Karena sifat ketunggalan $b \in R$ menjadikan ring dengan sifat *uniquely morphic* lebih mudah ditentukan, dibandingkan ring dengan sifat *left morphic*. Diperoleh bahwa ring Boolean, ring *division*, $\mathbf{Z}_4$, $\mathbf{Z}_2[x]/(x^2)$ dan $S = \mathbf{M}_2(\mathbf{Z}_2)$, merupakan ring dengan sifat *uniquely morphic*.

Proposisi 3.2.2. [1] *Setiap ring division adalah ring dengan sifat UM*.

Bukti: Diberikan suatu ring R yang merupakan ring *division*. Akan ditunjukkan R adalah ring dengan sifat *UM*, artinya untuk setiap $0 \neq a \in R$ terdapat dengan tunggal $b \in R$ sehingga berlaku $Ra = l(b)$ dan $l(a) = Rb$. Karena setiap ring *division* merupakan ring *simple* yang artinya ideal $I \subseteq R$ hanya $\{0\}$ dan R maka untuk suatu $I = R = \langle 1 \rangle$ dan $I = \{0\}$ diperoleh: $R1 = \{x1 \mid x \in R\} = R$, $R0 = \{x0 \mid x \in R\} = \{0\}$, $l(1) = \{x \in R \mid x1 = 0\} = \{0\}$ dan $l(0) = \{y \in R \mid y0 = 0\} = R$ sehingga berlaku $R1 = l(0)$ dan $l(1) = R0$. Terbukti ring division merupakan ring dengan sifat *uniquely morphic* □

Contoh 3.2.3.

1. $\mathbf{Z}_4$ adalah *R:UM*

   $\mathbf{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ dengan $\bar{1} \sim \bar{0}$, $\bar{2} \sim \bar{2}$, $\bar{3} \sim \bar{0}$ adalah semua kemungkinan relasi dalam $\mathbf{Z}_4$

   $\bar{1} \sim \bar{0}$, karena $R\bar{1} = \{x\bar{1} \mid x \in \mathbf{Z}_4\} = \mathbf{Z}_4 = \{y \in \mathbf{Z}_4 \mid y\bar{0} = \bar{0}\} = l(\bar{0})$,

   $l(\bar{1}) = \{x \in \mathbf{Z}_4 \mid x\bar{1} = \bar{0}\} = \{\bar{0}\} = \{y\bar{0} \mid y \in \mathbf{Z}_4\} = R\bar{0}$

   $\bar{2} \sim \bar{2}$, karena $R\bar{2} = \{x\bar{2} \mid x \in \mathbf{Z}_4\} = \{\bar{0}, \bar{2}\} = \{y \in \mathbf{Z}_4 \mid y\bar{2} = \bar{0}\} = l(\bar{2})$

   $\bar{3} \sim \bar{0}$, karena $R\bar{3} = \{x\bar{3} \mid x \in \mathbf{Z}_4\} = \mathbf{Z}_4 = \{y \in \mathbf{Z}_4 \mid y\bar{0} = \bar{0}\} = l(\bar{0})$

   $R\bar{0} = \{x\bar{0} \mid x \in \mathbf{Z}_4\} = \{0\} = \{y \in \mathbf{Z}_4 \mid y\bar{3} = \bar{0}\} = l(\bar{3})$.

2. $\mathbf{Z}_2[x]/(x^2)$ adalah *R:UM*

   $\mathbf{Z}_2[x]/(x^2) = \{0, 1, x, 1+x\}$ dengan $\bar{1} \sim \bar{0}$, $\bar{x} \sim \bar{x}$ dan $\overline{1+x} \sim \bar{0}$ adalah semua kemungkinan relasi dalam $\mathbf{Z}_2[x]/(x^2)$.

   $\bar{1} \sim \bar{0}$, karena $R\bar{1} = \{y\bar{1} \mid y \in Z_2[x]/x^2\} = Z_2[x]/x^2 = \{z \in Z_2[x]/x^2 \mid z\bar{0} = \bar{0}\} = l(\bar{0})$ dan

   $l(\bar{1}) = \{y \in Z_2[x]/x^2 \mid y\bar{1} = \bar{0}\} = \{\bar{0}\} = \{z\bar{0} \mid z \in Z_2[x]/x^2\} = R\bar{0}$

   $\bar{x} \sim \bar{x}$, karena $R\bar{x} = \{y\bar{x} \mid y \in Z_2[x]/x^2\} = \{\bar{0}, \bar{x}\} = \{z \in Z_2[x]/x^2 \mid z\bar{x} = \bar{0}\} = l(\bar{x})$

   $\overline{1+x} \sim \bar{0}$, karena $R\overline{1+x} = \{y\overline{1+x} \mid y \in Z_2[x]/x^2\} = Z_2[x]/x^2 = \{z \in Z_2[x]/x^2 \mid z\bar{0} = \bar{0}\} = l(\bar{0})$

   $l(\overline{1+x}) = \{y \in Z_2[x]/x^2 \mid y(\overline{1+x}) = \bar{0}\} = \{\bar{0}\} = \{z\bar{0} \mid z \in Z_2[x]/x^2\} = R\bar{0}$

Selanjutnya, diberikan suatu sifat yang terkait dengan elemen nilpoten, dan radikal Jacobson dalam suatu ring R yang bersifat uniquely morphic.

Proposisi 3.2.4. [1] *Jika R ring dengan sifat uniquely morphic maka berlaku :*

1. $a^2 = 0$ *untuk setiap elemen nilpoten* $a \in R$.

2. $Jac(R)^2 = \{0\}$.

3. *R adalah ring Boolean atau indecomposable.*

Bukti: Diberikan suatu ring R:*UM*, artinya untuk setiap $0 \neq a \in R$ terdapat dengan tunggal $b \in R$ sehingga berlaku $Ra = l(b)$ dan $l(a) = Rb$.

1. Diambil sebarang $0 \neq a \in R$, dengan a elemen nilpoten dalam *R*, artinya $a^n = 0$ untuk suatu $n \in \mathrm{N}$. Akan ditunjukkan $a^2 = 0$.
   Dimisalkan $a \sim b$ yang artinya $Ra = l(b)$ dan $l(a) = Rb$. Berdasarkan Proposisi [2] untuk suatu elemen nilpoten $a \in R$ akan terdapat $1 + a \in U(R)$. Akan ditunjukkan $(1+a)a \sim b$, dengan aturan $R(1+a)a = l(b)$ dan $l((1+a)a) = Rb$.

   (1.a) Akan ditunjukkan $R(1+a)a = l(b)$.
   Diambil sebarang $x \in R(1+a)a$ dengan $x = r(1+a)a$ untuk suatu $r \in R$. Akan ditunjukkan $x \in l(b)$, artinya $xb = 0$ untuk suatu $b \in R$. Jika $a \in Ra$ dan diketahui $Ra = l(b)$, maka berlaku $a \in l(b)$ atau dengan kata lain $ab = 0$. Karena $x = r(1+a)a$ maka untuk suatu $b \in R$ diperoleh $xb = r(1+a)ab = r(1+a).0 = 0$. Jadi, untuk sebarang $x \in R(1+a)a$ diperoleh $x \in l(b)$ dengan kata lain $R(1+a)a \subseteq l(b)$.
   Sebaliknya, diambil sebarang $y \in l(b)$ dengan $yb = 0$. Karena $l(b) = Ra$ maka diperoleh $y = ra$ untuk suatu $r \in R$. Akan ditunjukkan $y \in R(1+a)a$ dengan $y = r(1+a)a$ untuk suatu $r \in R$. Ditunjukkan dengan menggunakan sifat kontradiksi. Diandaikan $y \neq r(1+a)a$ maka untuk suatu $b \in R$ diperoleh $yb \neq r(1+a)ab$. Di lain pihak $r(1+a)ab = r(1+a)0 = 0$. Akibatnya $yb \neq 0$. Timbul kontradiksi, pengandaian diingkari, diperoleh $y = r(1+a)a$. Jadi, untuk sebarang $y \in l(b)$ diperoleh $y \in R(1+a)a$ dengan kata lain $l(b) \subseteq R(1+a)a$. Karena $R(1+a)a \subseteq l(b)$ dan $l(b) \subseteq R(1+a)a$ maka terbukti $R(1+a)a = l(b)$.
   (1.b) Akan ditunjukkan $l(a(1+a)) = Rb$. Dengan cara yang analog seperti bukti (1.a) maka diperoleh $l(a(1+a)) = Rb$.

Dari bukti (1.a) dan (1.b) diperoleh $(1+a)a \sim b$. Jika $(1+a)a \sim b$ dan diketahui $a \sim b$ maka berlaku $Ra = l(b) = R(1+a)a$ sehingga untuk $b \neq 0$ yang tunggal diperoleh $a = (1+a)a = a + a^2$ atau dengan kata lain $a^2 = 0$.

2. Diambil sebarang $r \in Jac(R)$ dan diasumsikan $r \sim s$ artinya $Rr = l(s)$ dan $l(r) = Rs$, untuk suatu $s \in R$. Akan ditunjukkan terlebih dahulu bahwa untuk suatu $1 - r \in Jac(R)$ berlaku $r(1-r) \sim s$, dengan kata lain $Rr(1-r) = l(s)$ dan $l\,r(1-r) = Rs$.

   (2.a) Akan ditunjukkan $Rr(1-r) = l(s)$.
   Diambil sebarang $x \in Rr(1-r)$ dengan aturan $x = yr(1-r)$ untuk suatu $y \in R$. Akan ditunjukkan $x \in l(s)$ dengan $xs = 0$ untuk suatu $s \in R$. . Jika $r \in Rr = l(s)$ maka $rs = 0$ sehingga untuk $s \in R$ yang digandakan dari kanan pada $x = yr(1-r)$, diperoleh $xs = yr(1-r)s = yrs - yr^2s = y(rs) - yr(rs) = y.0 - y.0 = 0$. Jadi, untuk setiap $x \in Rr(1-r)$ diperoleh $x \in l(s)$ dengan kata lain $Rr(1-r) \subseteq l(s)$.
   Sebaliknya, diambil sebarang $y \in l(s)$ dengan $ys = 0$. Di lain pihak karena $l(s) = Rr$ maka untuk $y \in Rr$ berlaku $y = zr$ untuk suatu $z \in R$. Akan ditunjukkan $y \in Rr(1-r)$ dengan $y = zr(1-r)$ untuk suatu $z \in R$. Ditunjukkan dengan menggunakan sifat kontradiksi. Diandaikan $y \neq zr(1-r)$. Jika $r \in Rr = l(s)$ maka $rs = 0$ sehingga untuk

suatu $s \in R$ diperoleh $ys \neq zr(1-r)s$. Di lain pihak $zr(1-r)s = zrs - zr^2 s = z.0 - zr.0 = 0$. Akibatnya $ys \neq 0$. Timbul kontradiksi, pengandaian diingkari sehingga $y = zr(1-r)$. Jadi, untuk setiap $y \in l(s)$ diperoleh $y \in Rr(1-r)$ atau dengan kata lain $l(s) \subseteq Rr(1-r)$. Selanjutnya, karena $Rr(1-r) \subseteq l(s)$ dan $l(s) \subseteq Rr(1-r)$ maka terbukti bahwa $Rr(1-r) = l(s)$.

(2.b) Akan ditunjukkan $l\,r(1-r) = Rs$. Dengan cara yang analog seperti bukti (2.a) maka diperoleh $l\,r(1-r) = Rs$.

Dari bukti (2.a) dan (2.b) berlaku $r(1-r) \sim s$. Selanjutnya dengan mengingat $r \sim s$ maka diperoleh $Rr(1-r) = l(s) = Rr$ sehingga untuk untuk $s \neq 0$ yang tunggal, diperoleh $r(1-r) = r$ atau $r - r^2 = r$. Akibatnya $r^2 = 0$ untuk sebarang $r \in Jac(R)$.

Diambil sebarang $a, c \in Jac(R)$. Artinya $a^2 = c^2 = 0$. Diasumsikan, $a \sim b$ untuk suatu $b \in R$. Jadi, untuk suatu $a + c \in Jac(R)$ maka diperoleh $0 = (a+c)^2 = a^2 + ac + ca + c^2 = ac + ca$ atau dengan kata lain $ac = -ca$. Berdasarkan Teorema 2.1.15, untuk $a, c \in Jac(R)$ dengan $ac = -ca$ maka diperoleh $1 + c$ dan $1 - c$ yang merupakan unit dalam R. Akan ditunjukkan $a(1-c) \sim b$ artinya $Ra(1-c) = l(b)$ dan $l(a(1-c)) = Rb$.

(2.c) Akan ditunjukkan $Ra(1-c) = l(b)$.

Diambil sebarang $x \in Ra(1-c)$ dengan $x = ra(1-c)$ untuk suatu $r \in R$. Akan ditunjukkan $x \in l(b)$ dengan $xb = 0$. Karena $x = ra(1-c)$ maka untuk suatu $b \in R$ diperoleh $xb = ra(1-c)b = rab - racb$. Mengingat $ac = -ca$ maka $xb = rab + rcab$. Selanjutnya, jika $a \in Ra = l(b)$ maka berlaku $ab = 0$. Jadi, untuk $xb = rab + rcab$ diperoleh $xb = r(ab) + rc(ab) = r.0 + rc.0 = 0$. Diperoleh, jika $x \in Ra(1-c)$ maka berlaku $x \in l(b)$ atau dengan kata lain $Ra(1-c) \subseteq l(b)$.

Sebaliknya, diambil sebarang $y \in l(b)$ dengan $yb = 0$ untuk suatu $b \in R$ Akan ditunjukkan $y \in Ra(1-c)$ dengan $y = za(1-c)$ untuk suatu $z \in R$. Ditunjukkan dengan menggunakan sifat kontradiksi. Diandaikan, $y \neq za(1-c)$ artinya untuk suatu $b \in R$ diperoleh $yb \neq za(1-c)b$ yang ekuivalen dengan $yb \neq zab - zacb$. Mengingat $ac = -ca$ maka $yb \neq zab + zcab$. Selanjutnya, karena $ab = 0$ maka diperoleh $yb \neq z(ab) + zc(ab)$ atau $yb \neq z.0 + zc.0 = 0$. Timbul kontradiksi, pengandaian diingkari sehingga $y = za(1-c)$. Jadi, untuk sebarang $y \in l(b)$ diperoleh $y \in Ra(1-c)$ atau dengan kata lain $l(b) \subseteq Ra(1-c)$. Karena $Ra(1-c) \subseteq l(b)$ dan $l(b) \subseteq Ra(1-c)$ maka terbukti $Ra(1-c) = l(b)$.

(2.d) Akan ditunjukkan $l(a(1-c)) = Rb$. Dengan cara yang analog seperti bukti (2.c) maka diperoleh $l(a(1-c)) = Rb$.

Berdasarkan bukti (2.c) dan (2.d) berlaku $a(1-c) \sim b$. Selanjutnya dengan mengingat $a \sim b$ maka $Ra(1-c) = l(b) = Ra$. Jadi, untuk $b \neq 0$ yang tunggal, diperoleh $a(1-c) = a$ atau dengan kata lain $a - ac = a$. Akibatnya $ac = 0$. Terbukti, $ac \in Jac(R)^2 = \{0\}$.

3. Diasumsikan R merupakan ring yang tidak *indecomposable*. Artinya R memuat suatu elemen idempoten central e yang non trivial. Sebelumnya akan ditunjukkan $e \sim 1-e$ artinya $Re = l(1-e)$ dan $l(e) = R(1\text{-}e)$.

   (3.a) Akan ditunjukkan $Re = l(1-e)$.

   Diambil sebarang $x \in Re$ dengan $x = re$ untuk suatu $r \in R$. Akan ditunjukkan $x \in l(1-e)$ dengan $x(1-e) = 0$. Karena $x = re$ maka untuk suatu $1-e \in R$ diperoleh $x(1-e) = re(1-e) = re - re^2$.

   Mengingat $e \in R$ adalah elemen idempoten maka diperoleh $x(1-e) = re - re = 0$. Jadi, untuk sebarang $x \in Re$ diperoleh $x \in l(1-e)$ atau dengan kata lain $Re \subseteq l(1-e)$.

   Sebaliknya, diambil sebarang $x \in l(1-e)$ dengan $x(1-e) = 0$. Akan ditunjukkan $x \in Re$ dengan $x = re$ untuk suatu $r \in R$. Karena $x(1-e) = 0$ maka $x - xe = 0$ atau $x = xe$, untuk suatu $x \in R$. Jadi, $x = xe \in Re$. Terbukti, untuk sebarang $x \in l(1-e)$ diperoleh $x \in Re$, dengan kata lain $l(1-e) \subseteq Re$. Selanjutnya, karena $Re \subseteq l(1-e)$ dan $l(1-e) \subseteq Re$ maka terbukti $Re = l(1-e)$.

   (3.b) Akan ditunjukkan $l(e) = R(1\text{-}e)$. Dengan cara yang analog seperti pada bagian (3.a) maka diperoleh $l(e) = R(1\text{-}e)$.

Dari bukti (3.a) dan (3.b) berlaku $e \sim 1-e$. Selanjutnya, untuk suatu $u \in U(R)$, dengan cara yang analog pada bukti (3.a) dan (3.b) diperoleh $ue \sim 1-e$ dan $e \sim u(1-e)$. Akibatnya, $ue = e$ dan $1-e = u(1-e)$. Jadi, $1-e = u(1-e) = u - ue = u - e$ sehingga $u = 1$ atau $U(R) = \{1\}$. Berdasarkan bukti Proposisi 3.1.6, jika $U(R) = \{1\}$ maka ring R merupakan ring Boolean. □

Suatu himpunan matriks berukuran $n \times n$ atas ring R (dinotasikan dengan $\mathbf{M}_n(R)$) dapat menjadi ring dengan sifat *uniquely morphic*. Pernyataan tersebut dijelaskan dalam sifat berikut ini.

Proposisi 3.2.5. [1] *Diberikan suatu ring R dengan* $n \geq 2$. $\mathbf{M}_n(R)$ *merupakan ring dengan sifat uniquely morphic jika dan hanya jika* $R \cong \mathbf{Z_2}$ *dan* $n = 2$.

Bukti: Diberikan $S = \mathbf{M}_n(R)$, dan E_{ij}: matriks unit berukuran $n \times n$ (dinotasikan $\{E_{ij} : 1 \leq i, j \leq n\}$). Dimisalkan suatu himpunan $A \subseteq S$ dengan $A = E_{12} + E_{23} + \ldots + E_{n-1,n}$ sehingga berlaku $A^n = 0$ (namun $A^{n-1} \neq 0$). Selanjutnya, berdasarkan Proposisi 3.2.4 (1), $n = 2$ untuk sebarang nilpoten dalam *S*. Diambil sebarang $x \in \mathbf{M}_2(R)$ dengan $x = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a,b,c,d \in R \right\}$ dan $0 \neq u \in U(R)$, diperoleh :

$$R\,E_{11} = \{x\,E_{11} \mid x \in \mathbf{M}_2(R)\} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| x \in \mathbf{M}_2(R) \right\} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.5}$$

$$RE_{22} = \{xE_{22} \mid x \in \mathbf{M}_2(R)\} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| x \in \mathbf{M}_2(R) \right\} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{bmatrix}, \tag{3.6}$$

$$l(E_{22}) = \{x \in \mathbf{M}_2(R) \mid xE_{22} = 0\} = \left\{ x \in \mathbf{M}_2(R) \middle| \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}, \tag{3.7}$$

$$l(E_{11}) = \{x \in \mathbf{M}_2(R) | xE_{11} = 0\} = \left\{x \in \mathbf{M}_2(R) \left| \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right.\right\} \quad (3.8)$$

(i) Akan ditunjukkan $RE_{11} = l(E_{22})$.

Diambil sebarang $x \in RE_{11}$ maka $x = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$ untuk suatu $a, c \in R$. Akan ditunjukkan $x \in l(E_{22})$ dengan $xE_{22} = 0$. Diperoleh $xE_{22} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Jadi telah ditunjukkan untuk sebarang $x \in RE_{11}$ diperoleh $x \in l(E_{22})$. Terbukti $RE_{11} \subseteq l(E_{22})$.

Sebaliknya, diambil sebarang $y \in l(E_{22})$ artinya $yE_{22} = 0$. Akan ditunjukkan $y \in RE_{11}$ dengan kata lain $y = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$. Untuk sebarang $y \in \mathbf{M}_2(R)$, dengan $y = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ diperoleh $yE_{22} = 0$ atau $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, dengan kata lain $\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Hal tersebut berarti, untuk $y = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dengan $b = 0 = d$, diperoleh $y = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$. Jadi, untuk sebarang $y \in l(E_{22})$ diperoleh $y \in RE_{11}$ dengan kata lain $l(E_{22}) \subseteq RE_{11}$. Karena $RE_{11} \subseteq l(E_{22})$ dan $l(E_{22}) \subseteq RE_{11}$ maka terbukti $RE_{11} = l(E_{22})$.

(ii) Akan ditunjukkan $l(E_{11}) = RE_{22}$. Dengan cara yang analog seperti bukti (i) maka diperoleh $l(E_{11}) = RE_{22}$.

Jadi, telah dibuktikan bahwa $E_{11} \sim E_{22}$. Selanjutnya, untuk suatu $u \in U(R)$, dan dengan cara yang anolog seperti bukti (i) dan (ii), maka diperoleh $E_{11} \sim uE_{22}$. Jadi, $E_{11} \sim E_{22}$ dan $E_{11} \sim uE_{22}$ sehingga diperoleh $u = 1$ atau $U(R) = \{1\}$. Hal ini berarti R merupakan ring tereduksi. Di lain pihak, karena S merupakan ring dengan sifat *uniquely morphic*, dengan kata lain S juga merupakan ring dengan sifat *left morphic* maka dapat disimpulkan R merupakan ring tereduksi dengan sifat *left morphic*. Selanjutnya, berdasarkan bukti Proposisi, jika R tereduksi maka R merupakan ring Boolean. Kenyataannya $S = \mathbf{M}_n(R)$ bukan merupakan ring Boolean sehingga berdasarkan Proposisi 4.2.4, S merupakan ring yang *indecomposable*, artinya S tidak memuat elemen idempoten *central* yang nontrivial. Jadi, R juga tidak memiliki elemen idempoten *central* yang nontrivial atau $R = \{0, 1\} \cong \mathbf{Z}_2$ Sebaliknya, diberikan suatu ring $S = \mathbf{M}_2(\mathbf{Z}_2)$ dan diambil sebarang $0 \neq a \in S$. Akan ditunjukkan bahwa terdapat dengan tunggal suatu $b \in S$ sehingga berlaku $a \sim b$. Dimisalkan $a = E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, maka akan terdapat $b = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ sehingga diperoleh $a \sim b$.

Berdasarkan (4.5)-(4.8), jelas bahwa $Ra = l(b)$ dan $l(a) = Rb$. Selanjutnya, dapat dikerjakan untuk elemen a yang lain dan b yang tertentu sehingga, untuk $a \in \{E_{11}, E_{22}, E_{11} + E_{12}, E_{12} + E_{22}, E_{21} + E_{22}, E_{11} + E_{21}\}$ hanya terdapat $b = 1 - a$, dengan $b \in S$ sehingga berlaku $a \sim b$. Selanjutnya, untuk $a \in \{E_{12}, E_{21}, E_{11} + E_{12} + E_{21} + E_{22}\}$ akan terdapat $b = a$ sehingga berlaku $a \sim b$. Terbukti untuk sebarang $0 \neq a \in S$ akan terdapat dengan tunggal suatu $b \in S$ sehingga berlaku $a \sim b$ atau dengan kata lain R bersifat *uniquely morphic*. □

Proposisi 3.2.6. [1] *Diberikan suatu ring R dengan sifat uniquely morphic. Jika untuk setiap* $0 \neq a \in R$ *dengan* $a^2 = 0$ *maka berlaku* $a \sim a$.

Bukti: Diberikan suatu elemen $0 \neq a \in R$ dengan $a^2 = 0$. Berdasarkan Proposisi [2], jika $a \in R$ dengan a elemen nilpoten maka berlaku $1-a \in U(R)$. Diandaikan untuk $0 \neq a \in R$, dengan $a^2 = 0$ berlaku $a \sim b$, untuk suatu $b \in R$. Di lain pihak untuk $c \in R$ berlaku $1-b \sim c$. Akan ditunjukkan $1-b \sim (1-a)c$ artinya akan ditunjukkan bahwa $R1-b = l((1-a)c)$ dan $l(1-b) = R(1-a)c$. Namun sebelumnya perlu diperhatikan bahwa untuk $a \in Ra$ dengan $Ra = l(b)$ diperoleh $a \in l(b)$ yang artinya $ab = 0$. Dengan cara yang analog, diperoleh $b \in Rb$ dengan $Rb = l(a)$ yang artinya $ba = 0$. Dari dua kenyataan itu, dapat disimpulkan bahwa $(1-b)(1-a) = 1-a-b+ba = 1-a-b+0 = 1-b-a+ab = (1-a)(1-b)$. Selanjutnya, karena $1-b \in R1-b = l(c)$ maka $(1-b)c = 0$.

(i) Akan ditunjukkan $R1-b = l((1-a)c)$.

Diambil sebarang $x \in R1-b$ dengan $x = y(1-b)$ untuk suatu $y \in R$. Akan ditunjukkan $x \in l((1-a)c)$ artinya $x(1-a)c = 0$. Karena $x = y(1-b)$ maka untuk $1-a \in U(R)$ dan $c \in R$ diperoleh $x(1-a)c = y(1-b)(1-a)c = = y(1-a)(1-b)c = y(1-a).0 = 0$. Jadi, telah ditunjukkan untuk sebarang $x \in R1-b$ berlaku $x \in l((1-a)c)$ dengan kata lain $R1-b \subseteq l((1-a)c)$.

Sebaliknya, diambil sebarang $y \in l((1-a)c)$ dengan $y(1-a)c = 0$. Akan ditunjukkan $y \in R1-b$ artinya $y = z(1-b)$ untuk suatu $z \in R$. Ditunjukkan dengan menggunakan sifat kontradiksi. Andaikan $y \neq z(1-b)$ maka untuk suatu $(1-a) \in U(R)$ dan $c \in R$ diperoleh $y(1-a)c \neq z(1-b)(1-a)c$. Di lain pihak karena $(1-b)(1-a) = (1-a)(1-b)$ diperoleh $y(1-a)c \neq z(1-a)(1-b)c$, serta mengingat $(1-b)c = 0$ maka berlaku $y(1-a)c \neq z(1-a).0$, akibatnya $y(1-a)c \neq 0.$ Timbul kontradiksi, pengandaian diingkari, terbukti $y \in R1-b$. Jadi, telah ditunjukkan untuk sebarang $y \in l((1-a)c)$ berlaku $y \in R1-b$. Terbukti $l((1-a)c) \subseteq R1-b.$ Selanjutnya, karena $R1-b \subseteq l((1-a)c)$ dan $l((1-a)c) \subseteq R1-b$ maka terbukti $R1-b = l((1-a)c)$.

(ii) Akan ditunjukkan $l(1-b) = R(1-a)c$. Dengan cara yang analog, seperti bukti (i) maka diperoleh $l(1-b) = R(1-a)c$.

Jadi, telah dibuktikan bahwa $1-b \sim (1-a)c$. Berdasarkan Proposisi 3.1.8. yakni untuk suatu elemen a yang merupakan elemen LM dan $u \in U(R)$ berlaku $au \sim u^{-1}b$. Mengingat, $1-b \sim (1-a)c$ dengan $1-a \in U(R)$ maka diperoleh $(1-b)(1-a) \sim (1-a)^{-1}(1-a)c$. Di lain pihak, karena $(1-b)(1-a) = 1-a-b+ba = 1-a-b$ dan $(1-a)^{-1}(1-a)c = c$ maka berlaku $1-a-b \sim c$. Karena a elemen LM, maka $a \neq 0$ sehingga berlaku $1-a-b \neq 1-b$. Selanjutnya, karena $(1-b)c = 0$ dan mengingat $(1-b) \neq 0$ maka $c = 0$. Ekuivalen dengan menyatakan untuk $0 \neq 1-b \in R$, terdapat $(1-b)^{-1} \in R$ sehingga untuk $(1-b)c = 0$ berlaku $(1-b)^{-1}(1-b)c = 0$. Akibatnya, $c = 0$. Hal tersebut berarti, $1-b \in U(R)$. Karena $a \sim b$ dan $1-b \in U(R)$ maka $a \sim b(1-b)$ sehingga berlaku $b = b(1-b) = b - b^2$ atau dengan kata lain $b^2 = b - b = 0$. Diketahui sebelumnya bahwa $a^2 = a.a = 0$ artinya $a \in l(a) = Rb$, selain itu juga telah diperoleh $b^2 = bb = 0$ yang artinya $b \in l(b) = Ra$, maka dapat disimpulkan bahwa $Ra = Rb = l(a)$, dengan kata lain $a \sim a$.□

KESIMPULAN

Suatu ring yang bersifat *uniquely morphic* dapat ditentukan dengan mengambil sebarang elemen $0 \neq a \in R$, akan terdapat dengan tunggal $b \in R$, sedemikian hingga $Ra = l(b)$ dan $l(a) = Rb$. Beberapa ring yang bersifat UM adalah *division ring*, ring Boolean, $\mathbf{Z}_4$, $\mathbf{Z}_2[x]/(x^2)$. Serta memiliki beberapa sifat tertentu yaitu untuk setiap nilpoten $a \in R$ berlaku $a^2 = 0$ dan $Jac(R)^2 = 0$ setiap ring R yang bersifat UM merupakan ring Boolean atau *indecomposable,* selanjutnya untuk suatu himpunan matriks atas R berukuran $n \times n$ dengan $n \geq 2$ maka akan selalu dipenuhi $\mathbf{M}_n(R)$ adalah UM jika dan hanya jika $R \cong \mathbf{Z}_2$ dan $n = 2$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Kosan, M.T., Lee, T.K. and Zhou, Y., 2009. *Uniquely Morphic Rings*. Taipei: Mathematic Division, National Center for Theoritical Sciences NCTS/TPE-Math Technical Report 2009-010.

[2] Malik, D.S., Mordeson, J. M. and. Sen, M.K., 1997. *Fundamental of Abstract Algebra*.. Singapore: McGraw-Hill Companies.

[3] Dummit, D. S. and. Foote, R. M., 1999. *Abstract Algebra*. Singapore: John Wiley & Sons.

[4] Wisbauer, R., 1991. *Foundation of Modules and Ring Theory*. Amsterdam: Gordon and Breach Science Publisher.

[5] Brown, W. C., 1993. *Matrices over Commutative Rings*. New York: MARCEL DEKKER, pp. 10-11.