SCIENCE days 2010

ISBN : 978-602-97522-0-5

# PROSEDDING

## SEMINAR NASIONAL BASIC SCIENCE II

*Tema:*

*Kontribusi Sains untuk Pengembangan Pendidikan,*

*Biodiversitas dan Metigasi Bencana pada Daerah Kepulauan*

Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Pattimura

Ambon 2010

ISBN : 978-602-97522-0-5

# PROSEDING

## SEMINAR NASIONAL BASIC SCIENCE II

Konstribusi Sains Untuk Pengembangan Pendidikan,
Biodiversitas dan Metigasi Bencana
Pada Daerah Kepulauan

**SCIENTIFIC COMMITTEE:**

Prof. H.J. Sohilait, MS
Prof. Dr. Th. Pentury, M.Si
Dr. J.A. Rupilu, SU
Drs. A. Bandjar, M.Sc
Dr.Ir. Robert Hutagalung, M.Si

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS PATTIMURA**
**AMBON, 2010**

**ISBN: 978-602-97522-0-5**

# UNIT PADA NEAR-RING

Berny P. Tomasouw [1)], E. R. Persulessy [2)]

[1, 2)] *Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI*

## ABSTRAK

Himpunan tak kosong *R* merupakan ring jika terhadap operasi penjumlahan *R* grup abelian, terhadap operasi pergandaan *R* tertutup dan asosiatif serta memenuhi distributif. Jika sifat abelian dan distributif kiri dilepas dari *R*, maka akan diperoleh suatu struktur baru yang disebut *near-ring*. *Near-ring* memiliki sifat-sifat dasar yang berbeda dengan ring, terutama pada pergandaan elemen netral dan elemen invers terhadap operasi penjumlahan. Selain itu, pada klasifikasi *near-ring* juga terdapat beberapa tambahan jenis-jenis *near-ring*. Lebih lanjut, unit tidak dapat menjadi pembagi nol pada saat yang bersamaan dan sebaliknya. Jika *R near-integral domain* maka hal ini akan menjamin bahwa unit memiliki invers yang tunggal terhadap operasi pergandaan.

*Kata kunci* : *Near-integral domain, Near-ring,* Ring, Unit.

## PENDAHULUAN

Teori grup dan teori ring merupakan teori-teori yang sudah sangat dikenal dalam struktur aljabar. Pengembangan-pengembangan kedua teori inipun terus dilakukan. Hal ini dapat dilihat dari munculnya struktur-struktur baru yang dikembangkan dari kedua teori ini. Misalnya dari grup dikembangkan struktur baru yang dikenal dengan nama ”Semigrup”, sedangkan dari ring dikembangkan struktur baru yang dikenal dengan nama ”Semiring”.

Selain semiring, muncul suatu struktur baru yang disebut ”*Near-Ring*”. Suatu himpunan *N* merupakan *near-ring* jika memenuhi $(N,+)$ grup, $(N,\cdot)$ semigrup dan sifat distribusi kanan. Walaupun *Near-Ring* terbentuk dari ring dengan melepas sifat abelian dan distributif kiri namun hal ini membuat perbedaan yang sangat besar dan sangat mendasar antara ring dengan *near-ring*.

Selain itu, ada juga kasus-kasus tertentu pada ring yang tidak dibahas secara mendalam namun pada *near-ring* kasus-kasus tersebut dapat dibahas dengan baik dan lebih mendalam. Salah satu contohnya adalah tentang unit. Pada ring istilah unit telah diperkenalkan namun hanya sebatas definisi saja. Sedangkan pada *near-ring* muncul sifat-sifat baru yang berkaitan dengan unit.

ISBN: 978-602-97522-0-5

Berdasarkan gambaran di atas, maka peneliti merasa tertarik untuk mempelajari dan membahas lebih dalam tentang *near-ring* serta unit pada *near-ring*.

**LANDASAN TEORI**

**Definisi 2.2.1**

Diberikan himpunan $R \neq \varnothing$. Pada *R* didefinisikan operasi-operasi biner "$+$" dan "$\cdot$". Himpunan *R* disebut ring terhadap kedua operasi biner tersebut, jika :

I. Terhadap operasi "$+$", $(R,+)$ adalah grup abelian.

II. Terhadap operasi "$\cdot$" memenuhi sifat

i). Tertutup $(\forall\, a,b \in R)\ a \cdot b \in R$.

ii). Asosiatif $(\forall\, a,b,c \in R)\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

III. i). Distributif Kiri $(\forall\, a,b,c \in R)\ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

ii). Distributif Kanan $(\forall\, a,b,c \in R)\ (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Himpunan *R* yang membentuk ring terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan yang didefinisikan padanya dinotasikan dengan $(R, +, \cdot)$.

**Definisi 2.2.2**

Suatu ring *R* dikatakan ring dengan elemen satuan jika *R* memuat elemen netral terhadap operasi "$\cdot$", yaitu

$$(\exists\, e \in R)(\forall\, a \in R)\ e \cdot a = a \cdot e = a$$

Elemen netral terhadap "$\cdot$" ini disebut elemen satuan.

**Definisi 2.2.3**

Jika *R* adalah ring dengan elemen satuan 1 maka elemen $u \in R$ disebut unit jika $u^{-1} \in R$.

**Definisi 2.2.4**

Misalkan *R* ring dan $a \in R$.

i). Elemen *a* disebut pembagi nol kiri jika terdapat $b \in R$ dan $b \neq 0$ sehingga $ab = 0$.

ii). Elemen *a* disebut pembagi nol kanan jika terdapat $b \in R$ dan $b \neq 0$ sehingga $ba = 0$.

ISBN: 978-602-97522-0-5

iii). Elemen *a* disebut pembagi nol jika terdapat $b \in R$ dan $b \neq 0$ sehingga $ab = ba = 0$.

**Definisi 2.2.5**

Suatu pembagi nol *a* disebut pembagi nol sejati (*proper zero divisor*) jika $a \neq 0$.

**Definisi 2.2.6**

Ring $(D,+,\cdot)$ disebut daerah integral, jika *D* mempunyai elemen satuan, *D* komutatif dan *D* tidak memuat pembagi nol sejati.

**UNIT PADA NEAR-RING**

**Near-Ring Dan Klasifikasi Near-Ring**

**Definisi 4.1.1**

Diberikan himpunan $N \neq \varnothing$. Pada *N* didefinisikan operasi-operasi biner "$+$" dan "$\cdot$". Himpunan *N* disebut *near-ring* terhadap kedua operasi biner tersebut, jika memenuhi :

i). $(N,+)$ adalah grup.

ii). $(N,\cdot)$ adalah semigrup.

iii). Distributif Kanan

$$(\forall a,b,c \in N)\ (a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$$

Himpunan *N* yang membentuk *near-ring* terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan yang didefinisikan padanya dinotasikan dengan $(N,+,\cdot)$.

Contoh 4.1.1

Diberikan $(G,+)$ grup. Pada *G* didefinisikan operasi "$\cdot$" sebagai berikut

$$(\forall a,b \in G)\ a\cdot b = a$$

Dapat ditunjukkan bahwa $(G,+,\cdot)$ merupakan *near-ring*.

<u>Bukti</u>

I. $(G,+)$ grup.

Jelas dari yang diketahui.

II. $(G,\cdot)$ semigrup

a. Tertutup

Ambil sebarang $a,b \in G$.

ISBN: 978-602-97522-0-5

Akan ditunjukkan $a \cdot b \in G$.

Karena $a \cdot b = a$ dan $a \in G$ maka terbukti $a \cdot b \in G$.

b. Asosiatif

Ambil sebarang $a, b, c \in G$.

Akan ditunjukkan $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

$$\begin{aligned}(a \cdot b) \cdot c &= a \cdot b \\ &= a \cdot (b \cdot c)\end{aligned}$$

III. Distributif kanan

Ambil sebarang $a, b, c \in G$.

Akan ditunjukkan $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

$$\begin{aligned}(a + b) \cdot c &= a + b \\ &= a \cdot c + b \cdot c\end{aligned}$$

Berdasarkan I, II dan III terbukti bahwa $(G, +, \cdot)$ *near-ring*.

**Definisi 4.1.2**

Diberikan $N$ *near-ring*.

i). $e \in N$ disebut elemen satuan kiri terhadap operasi pergandaan jika

$$(\forall a \in N) \; ea = a$$

ii). $e \in N$ disebut elemen satuan kanan terhadap operasi pergandaan jika

$$(\forall a \in N) \; ae = a$$

iii). $e \in N$ disebut elemen satuan terhadap operasi pergandaan jika

$$(\forall a \in N) \; ea = ae = a$$

**Definisi 4.1.3**

Suatu *near-ring* $N$ dikatakan *near-ring* dengan elemen satuan jika $N$ memuat elemen netral terhadap operasi pergandaan, yaitu

$$(\exists \, e \in N)(\forall a \in N) \; ae = ea = a$$

Contoh 4.1.2

Elemen satuan pada *near-ring* $F(G)$ adalah fungsi identitas *e*, yakni

$$e(x) = x \;, \forall x \in G$$

ISBN: 978-602-97522-0-5

Contoh 4.1.3

$(Z,+,\cdot)$, $(Q,+,\cdot)$, $(\mathrm{R},+,\cdot)$ dan $(\mathrm{C},+,\cdot)$ adalah *near-ring* dengan elemen satuan 1.

Pada *near-ring* elemen satuan belum tentu tunggal dan bisa saja yang dimiliki hanya elemen satuan kiri atau elemen satuan kanan. Contoh berikut akan memperlihatkan hal tersebut.

Contoh 4.1.4

Berdasarkan contoh 4.1.1 telah diketahui bahwa $(G,+,\cdot)$ *near-ring*.

Ambil $a,b,c \in G$ dimana $b \neq c$.

Dengan menggunakan operasi pergandaan yang telah didefinisikan diperoleh

$$ab = a \text{ dan } ac = a$$

Terlihat bahwa *b* dan *c* merupakan elemen satuan kanan dari *a* namun $b \neq c$.

Terlihat juga bahwa *G* tidak memiliki elemen satuan kiri karena

$$(\nexists e \in G)(\forall a \in G)\ ea = a$$

**Definisi 4.1.3**

Misalkan *N* *near-ring* dengan elemen satuan *e* dan $a \in N$.

i). $s \in N$ disebut invers kiri dari *a* terhadap operasi pergandaan jika $sa = e$.

ii). $s \in N$ disebut invers kanan dari *a* terhadap operasi pergandaan jika $as = e$.

iii). $s \in N$ disebut invers dari *a* terhadap operasi pergandaan jika

$$sa = as = e$$

Invers perkalian dari *a* dinotasikan dengan $a^{-1}$.

Pada *near-ring* invers terhadap pergandaan juga belum tentu tunggal. Hal ini akan diperlihatkan dengan contoh berikut.

Contoh 4.1.5

Berdasarkan Contoh 4.1.1 telah diketahui bahwa $(G,+,\cdot)$ *near-ring*.

Ambil $a,b,c,d \in G$ dimana $c \neq d$.

Karena $ab = a$ maka dapat dikatakan bahwa *b* merupakan elemen satuan kanan dari *a*. Selanjutnya,

ISBN: 978-602-97522-0-5

$$bc = b \text{ dan } bd = b$$

Terlihat bahwa *c* dan *d* merupakan invers kanan dari *a* namun $c \neq d$ .

**Sifat 4.1.1**

Jika *N* *near-ring* dan 0 elemen netral terhadap penjumlahan, maka $(\forall a, b, c \in N)$ berlaku

i). $-(a+b) = -b - a$ .

ii). $0 \cdot a = 0$ .

iii). $(-a)b = -ab$ .

<u>Bukti</u> :

Akan dibuktikan bagian ii).

ii). Ambil sebarang $a, b \in N$ . Akan ditunjukkan $0 \cdot a = 0$ .

Karena $0 \in N$ adalah elemen netral terhadap penjumlahan, maka

$$b + 0 = b$$

Selanjutnya,

$$(b+0)a = ba$$
$$ba + 0 \cdot a = ba$$

Karena $ba = ba + 0$, maka dapat ditulis

$$ba + 0 \cdot a = ba + 0$$

Dengan menggunakan hukum kanselasi diperoleh

$$0 \cdot a = 0$$

**Unit Pada *Near-ring***

Sebelum membahas unit dan beberapa teorema yang terkait dengannya, maka akan dibahas terlebih dahulu pembagi nol dan *near-integral domain*.

**Definisi 4.2.1**

Misalkan *N* *near-ring* dan $a \in N$ .

i). Elemen *a* disebut pembagi nol kiri jika terdapat $b \in N$ dan $b \neq 0$ sehingga $ab = 0$ .

**ISBN: 978-602-97522-0-5**

ii). Elemen $a$ disebut pembagi nol kanan jika terdapat $b \in N$ dan $b \neq 0$ sehingga $ba = 0$.

iii). Elemen $a$ disebut pembagi nol jika terdapat $b \in R$ dan $b \in N$ sehingga $ab = ba = 0$.

**Definisi 4.2.2**

*Near-ring* $(N, +, \cdot)$ disebut *near-integral domain*, jika

i). $N$ mempunyai elemen satuan

ii). $N$ tidak memuat pembagi nol yang bukan nol.

**Definisi 4.2.3**

Jika $N$ adalah *near-ring* dengan elemen satuan $e$ maka elemen $u \in N$ disebut unit jika

$$(\exists v \in N)\, uv = e$$

**Teorema 4.2.1**

Diberikan $N$ *near-ring* dengan elemen satuan $e$ dan $a \in N$.

i). Jika $a$ unit maka $a$ bukan pembagi nol.

ii). Jika $a$ pembagi nol maka $a$ bukan unit.

**<u>Bukti</u> :**

i). Diketahui $a$ unit. Akan ditunjukkan $a$ bukan pembagi nol.

Karena $a$ unit, maka terdapat $c \in N$ sehingga $ac = e$.

Andaikan $a$ pembagi nol, maka berdasarkan definisi terdapat $b \in N$ dimana $b \neq 0$ sehingga $ba = 0$. Selanjutnya,

$$\begin{aligned} ba &= 0 \\ (ba)c &= 0 \cdot c \\ b(ac) &= 0 \\ b \cdot e &= 0 \\ b &= 0 \end{aligned}$$

Kontradiksi $b \neq 0$ dan $b = 0$. Jadi $a$ bukan unit.

ii). Diketahui $a$ pembagi nol. Akan ditunjukkan $a$ bukan unit.

Karena $a$ pembagi nol maka sesuai definisi terdapat $b \in N$ dimana $b \neq 0$ sehingga $ba = 0$.

Andaikan $a$ unit, maka terdapat $c \in N$ sehingga $ac = e$.

Selanjutnya,

ISBN: 978-602-97522-0-5

$$b = b \cdot e = b(ac) = (ba)c = 0 \cdot c = 0$$

Kontradiksi $b \neq 0$ dan $b = 0$. Jadi terbukti *a* bukan pembagi nol.

**Teorema 4.2.2**

Diberikan *N near-ring* dengan elemen satuan *e*.

Hukum kanselasi kanan berlaku di *N* jika dan hanya jika *N near-integral domain*.

**Bukti :**

$\Rightarrow$). Diketahui *N near-ring* dengan elemen satuan 1.

Hukum kanselasi kanan berlaku di *N*.

Akan ditunjukkan *N near-integral domain*.

Cukup ditunjukkan bahwa *N* tidak memuat pembagi nol.

Ambil sebarang $a \in N$, harus ditunjukkan bahwa *a* bukan pembagi nol atau $ba = 0 \Rightarrow b = 0$. Selanjutnya,

$$\begin{aligned} ba &= 0 \\ ba &= 0 \cdot a \end{aligned}$$

Karena hukum kanselasi kanan berlaku di *N*, maka diperoleh $b = 0$. Jadi, terbukti *N near-integral domain*.

$\Leftarrow$). Diketahui *N near-integral domain*.

Akan ditunjukkan hukum kanan kanselasi berlaku di *N* atau

$$(\forall a, b, c \in N)\ [ab = cb \Rightarrow a = c]$$

Ambil sebarang $a, b, c \in N$. Selanjutnya,

$$\begin{aligned} ab &= cb \\ ab - cb &= cb - cb \\ ab - cb &= 0 \\ (a - c)b &= 0 \end{aligned}$$

Karena *N* near-integral domain maka *N* tidak memuat pembagi nol. Karena $b \in N$ maka *b* bukan pembagi nol sehingga diperoleh

$$a - c = 0 \text{ atau } a = c$$

Jadi, terbukti hukum kanselasi kanan berlaku di *N*.

ISBN: 978-602-97522-0-5

**Teorema 4.2.3**

Diberikan *N near-ring* dengan elemen satuan *e*.

Invers unit terhadap operasi pergandaan adalah tunggal di *N* jika dan hanya jika *N near-integral domain*.

**Bukti :**

$\Rightarrow$). Diketahui *N near-ring* dengan elemen satuan *e* dan invers unit tunggal.

Akan ditunjukkan N near-integral domain.

Cukup ditunjukkan bahwa hukum kanselasi kanan berlaku di *N* atau

$$(\forall a,b,c \in N)\left[ab = cb \Rightarrow a = c\right]$$

Ambil sebarang $a,b,c \in N$.

Misalkan *b* adalah unit maka terdapat $d \in N$ sehingga $bd = e$.

Karena invers unit tunggal maka *d* pasti tunggal sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} ab &= cb \\ (ab)d &= (cb)d \\ a(bd) &= c(bd) \\ ae &= ce \\ a &= c \end{aligned}$$

Terbukti hukum kanselasi kanan berlaku di *N*.

$\Leftarrow$). Diketahui *N near-integral domain*.

Akan ditunjukkan Invers terhadap operasi pergandaan dari unit adalah tunggal di *N*.

Ambil sebarang $a \in N$, dimana *a* unit.

Misalkan $b,c \in N$ merupakan invers dari *a* sehingga

$$ba = e \text{ dan } ca = e$$

Harus ditunjukkan bahwa $b = c$.

$$\begin{aligned} e &= e \\ ba &= ca \end{aligned}$$

Karena *N near-integral domain* maka hukum kanselasi kanan berlaku di *N*, sehingga diperoleh $b = c$.

ISBN: 978-602-97522-0-5

Jadi, terbukti invers dari unit *a* adalah tunggal.

**KESIMPULAN**

Dari pembahasan di atas dapat diambil kesimpulan sebagai berikut: Pada *near-ring* pergandaan sebarang elemen dengan elemen netral 0 belum tentu menghasilkan elemen netral 0. Posisi elemen netral (di kiri atau kanan) yang menentukan apakah hasilnya tetap elemen netral ataukah tidak. Selain itu, setiap elemen pada *near-ring* tidak dapat menjadi unit dan pembagi nol pada saat yang bersamaan. Selanjutnya, jika suatu *near-ring* merupakan *near-integral domain* maka hal ini akan menjamin bahwa setiap unit memiliki invers yang tunggal terhadap operasi pergandaan.

**DAFTAR PUSTAKA**

A. Adkins, William, dkk. *Algebra*. 1992. Springer. New York.

Pilz, Günter. 1983. *Near-Rings*. North-Holland. New York.

Abbasi, S. Jaban. Iqbal, Kahkashan. 2007. *On Near-Integral Domain*. Technology Forces. Pakistan.

Abbasi, S. Jaban. Iqbal, Kahkashan. 2008. *On Units In Near-rings*. Technology Forces. Pakistan.