SCIENCE days 2010

ISBN : 978-602-97522-0-5

PROSEDDING

SEMINAR NASIONAL BASIC SCIENCE II

Tema:

Kontribusi Sains untuk Pengembangan Pendidikan,
Biodiversitas dan Metigasi Bencana pada Daerah Kepulauan

Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Pattimura
Ambon 2010

ISBN : 978-602-97522-0-5

P R O S E D I N G

SEMINAR NASIONAL BASIC SCIENCE II

Konstribusi Sains Untuk Pengembangan Pendidikan,
Biodiversitas dan Metigasi Bencana
Pada Daerah Kepulauan

SCIENTIFIC COMMITTEE:

Prof. H.J. Sohilait, MS
Prof. Dr. Th. Pentury, M.Si
Dr. J.A. Rupilu, SU
Drs. A. Bandjar, M.Sc
Dr.Ir. Robert Hutagalung, M.Si

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS PATTIMURA
AMBON, 2010

ISBN: 978-602-97522-0-5

PERBANDINGAN PERIODE EKSAK DENGAN PERIODE PENDEKATAN PADA GERAK HARMONIK SEDERHANA

Grace Loupatty

Jurusan Fisika, FMIPA Universitas Pattimura, Ambon

ABSTRACT

The solution of the equation was done to seek the motion of a simple pendulum. The period of a simple harmonic motion is created to integral formed with exact periode. Which the integral has lower point and upper point. The methode of Quadrature Gauss-Legendre is used to resolve the first elliptic integration, from the Legendre polynomial. When the value of θ is small, so the exact periode value is equivalent with approximate periode

Keywords : exact periode, Quadrature Gauss-Legendre,Legendre polynomial.

PENDAHULUAN

Permasalahan klasik integrasi numerik adalah seperti yang diformulasikan sebagai suatu fungsi kontinu f(x), $a \le x \le b$ untuk mendapat koefisien $\{ w_k \}$dan nodes $\{ x_k \}$, dengan interval $1 \le k \le n$, sehingga formula quadraturnya [Arhami,M dan Desiani,A.,2005]

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_1^n w_k f(x_k) \tag{1.1}$$

Untuk rerata jarak nodes $\{x_k\}$, hasil rumus quadratur disebut dengan formula Newton-Cotes. Jika koefisien $\{ w_k \}$ diasumsikan semua sama, maka formula quadratur disebut sebagai formula Chebishev quadratur. Jika keduanya adalah koefisien $\{ w_k \}$dan nodes $\{x_k\}$, yang dihitung dengan persyaratan formula diatas eksak untuk polynomial pada derajat tertinggi, maka formula yang dihasilkan dinamakan Gauss-quadratur. Formula Gauss quadratur ini dengan syarat bahwa formula tersebut eksak untuk derajat paling tinggi, diberikan oleh:

$$\int_a^b p(x) f(x)dx = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k) \tag{1.2}$$

ISBN: 978-602-97522-0-5

dimana p(x) menyatakan fungsi bobot. Tipe memilih fungsi bobot p(x) =1 beserta dengan interval integrasi (a,b) → [-1,1], dikenal dengan nama bobot formula Gauss. Semua positif dan simpul-simpulnya merupakan akar dari golongan polynomial yang orthogonal, yang masing-masing diketahui fungsi bobot p(x) nya.

Sebuah bandul matematis bermassa *m*, digantungkan pada seutas tali dengan massa diabaikan dan memiliki panjang tali *l* dibawah pngaruh medan gravitasi bumi *g* akan memiliki persamaan gerak yang bisa dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial, sehingga bias diselesaikan dengan menggunakan metode numerik. Untuk penelitian ini digunakan metode quadratur Gauss-Legendre.

A. Metode Quadratur Gauss-Legendre

Metode Quadratur Gauss-Legendre merupakan metode integrasi numerik dengan menggunakan titik-titik Legendre (akar dari polynomial Legendre). Ditinjau suatu integral yang memiliki batas dari $x = a$ sampai $x = b$:

$$I = \int_a^b f(x)dx \tag{2.1}$$

Gauss Quadratur memiliki interval [-1,1], sehingga bentuk integralnya adalah

$$\int_a^b f(y)w(y)dy \equiv \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{N} w_i f(y_i) \tag{2.2}$$

dengan N adalah jumlah titik-titik Gauss, y_i adalah titik-titik Gauss

$$y_i = \left(\frac{b-a}{2}\right)x_i + \left(\frac{b+a}{2}\right) \tag{2.3}$$

yang terkait dengan polynomial orthogonal Legendre:

$$(n+1)P_{n\ 1}(x)\ \ x2n+1)xP_n(x)+nP_{n\ 1}(x)=0;P_0(x)=1,P_1(x)=x \tag{2.4}$$

bobot (w_i adalah *weights*)

$$w_i = \frac{2}{(1-x_i)^2[p'_n(x_i)]^2} \tag{2.5}$$

Nilai x_i merupakan nilai-nilai akar ke-i dari polinomial Legendre.

ISBN: 978-602-97522-0-5

B. Bandul Sederhana

Bandul sederhana (*Simple Pendulum*) adalah benda ideal yang terdiri dari sebuah titik massa, yang digantungkan pada tali ringan yang tidak dapat mulur. Jika bandul ditarik ke samping dari posisi seimbangnya dan dilepaskan, maka bandul akan berayun dalam bidang vertikal karena pengaruh gravitasi. Geraknya merupakan gerak osilasi dan periodik [Halliday,D.,dan Resnick,R., 1997].

Sebuah bandul yang panjangnya l dengan massa partikelnya m, membentuk sudut θ dengan vertikal. Gaya yang bekerja pada m adalah mg, yaitu gaya gravitasi, dan **T**, tegangan tali. Jika mg diuraikan atas komponen radial, dengan besar $mg\cos\theta$ dan komponen tangensial, dengan besar $mg\sin\theta$. Komponen radial dari gaya tersebut memberi sumbangan pada gaya sentripetal yang dibutuhkan agar benda tetap bergerak pada busur lingkaran. Komponen tangensialnya bertindak sebagai gaya pemulih yang bekerja pada m untuk mengembalikannya ke titik seimbang. Jadi gaya pemulihnya adalah [Halliday,D.,dan Resnick,R., 1997]

$$F=-mg\sin\theta \tag{2.6}$$

Persamaan ini dapat dinyatakan sebagai persamaan gerak $m\frac{d^2x}{dt^2}=-mg\sin\theta$ (2.7)

dengan $x=l\theta$ dimana sudut θ dinyatakan dalam radian maka persamaan gerak disajikan oleh persamaan diferensial dalam bentuk

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{g}{l}\sin\theta \tag{2.8}$$

Pada sembarang θ, persamaan tersebut sulit untuk diselesaikan secara analitik. Namun pada simpangan kecil sedemikian hingga sin θ ≈ tan θ ≈ θ. Persamaan (2.8) didekati dengan persamaan

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{g}{l}\theta \tag{2.9}$$

ISBN: 978-602-97522-0-5

Jika t = 0 bandul disimpangkan sejauh θ_0 dari titik setimbang maka penyelesaian persamaan (2.9) berbentuk $\theta(t) = \theta_0 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}t$ (2.10)

Dari penyelesaian tersebut mudah ditunjukkan bahwa periode ayunan (T) diberikan oleh kaitan

$$T_{pendekatan} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (2.11)$$

Penyelesaian eksak pada sembarang θ dapat dilakukan secara komputasi dengan mengubah persamaan (2.8) ke bentuk integral dan kemudian menghitung bentuk integral tersebut secara numerik. Hal ini dapat diperoleh dengan mengikuti langkah seperti yang dilakukan De Vries yaitu dengan mengalikan kedua ruas persamaan (2.8) dengan *dθ/dt* dan kemudian mengintegralkannya pada syarat awal *dθ/dt*=0 saat *t* = 0 sehingga diperoleh

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0} \qquad (2.12)$$

Mengingat periode T adalah waktu yang ditempuh bandul untuk bergerak sejauh empat kali θ_0 maka persamaan tersebut dapat dinyatakan sebagai

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} \qquad (2.13)$$

Untuk perhitungan secara numerik akan lebih menguntungkan jika persamaan diatas diubah ke bentuk integral yang memiliki batas bawah dan batas atas yang ajeg dalam bentuk

$$T_{eksak} = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\xi}{\sqrt{1-k^2}\sin^2\xi} \qquad (2.14)$$

dengan $k = \frac{\sin\theta_{mak}}{2}$ (2.15)

[De Vries, 1994]

Integral dari perbandingan kedua periode (T_{eksak} / $T_{pendekatan}$) inilah yang akan dihitung secara numerik untuk berbagai θ_{mak}(amplitudo) dalam interval [0,π/2].

ISBN: 978-602-97522-0-5

Penelitian ini bertujuan untuk melihat perbandingan nilai periode eksak dan periode pendekatan pada bandul sederhana dan menyelesaikan bentuk integrasi eliptik bentuk pertama, dari akar-akar polynomial Legendre.

METODE PENELITIAN

Integral dari perbandingan kedua periode (T_{eksak} / $T_{pendekatan}$) yang akan dihitung secara numerik untuk berbagai θ_{mak}(amplitudo) dalam interval [0,π/2]. Dengan metode Quadratur Gauss-Legendre, integrasi eliptik bentuk pertama,

$I = \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \xi}}$, dapat diselesaikan dengan menggunakan persamaan (2.2) – (2.5).

A. Algoritma

Algoritma metode Quadrature Gauss-Legendre untuk mencari akar polynomial Legendre dan fungsi bobotnya adalah sebagai berikut:

Diberikan: $x_m = \frac{(b+a)}{2}; x_1 = \frac{(b+a)}{2}$

Untuk i-0,1,...,(n+1)/2hingga terpenuhi, do;

$$z = \cos\left[\pi \frac{\left(i - \frac{1}{4}\right)}{\left(n + \frac{1}{2}\right)}\right]$$

p_1 :=1.0, p_2 :=0.0

untuk j = 1,...,n, do:

$p_3 := p_2 ; p_2 := p_1$

$p_1 := ((2j - 1)\, z\, p_2 - (j - 1)\, p_3) / j$

$pp = n(z\, p_1 - p_2) / (z^2 - 1)$

$z_1 = z$

$z = z_1 - p_1 / pp$

if $|z - z_1| > eps$

$x_i = (x_m - x_1) / z$

$x_{n+1-I} = x_m + x_l\, z$

ISBN: 978-602-97522-0-5

$w_i = 2\, x_i / ((1 - z^2)\, pp^2)$
$w_{n+1-i} = w_i$

B. Listing Program

```
Program Gauss_Legendre_Quadrature
INTEGER   NPOINT
REAL X1, X2
PARAMETER (NPOINT=10)
INTEGER I,j,t_d
REAL fungsi, xx, x(NPOINT), w(NPOINT), t_rad, integer,phi,k,yy
  - Input nilai awal (x1) dan nilai akhir (x2)
  - Menghitung abscissas x(i), weight w(i)
  - Subroutin dari formula Gaussian
  - Menentukan akar-akar ke-I dengan menggunakan metode Newton
  - Loop untuk relasi rekursi untuk mendapatkan polinomial Legendre yang dihitung pada x (i)
```

HASIL DAN PEMBAHASAN

Data yang diperoleh untuk perbandingan periode T (eksak) dengan T (pendekatan) terhadap sudut θ maksimum adalah pada tabel 1.

Tabel 1. Perbandingan Periode terhadap sudut θ

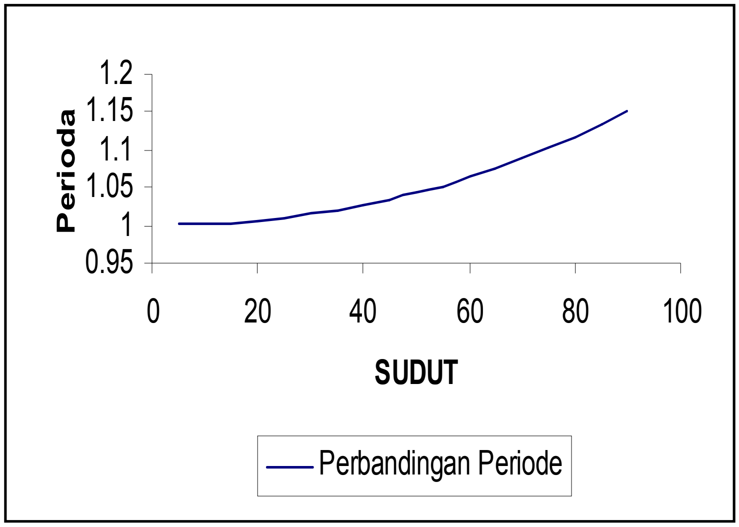
Sudut (derajat)	Perbandingan Periode	Sudut (derajat)	Perbandingan Periode
5	1.00041	50	1.04294
10	1.00166	55	1.05238
15	1.00373	60	1.06289
20	1.00666	65	1.07454
25	1.01044	70	1.08739
30	1.01509	75	1.1015
35	1.02064	80	1.11697
40	1.02711	85	1.13388
45	1.03453	90	1.15235

Dari data tersebut dibuat grafik perbandingan $T_{eksak} / T_{pendekatan}$ dan $\theta_{maks.}$

Berdasarkan hasil dan grafik diatas, tampak ketika $0 < \theta_{maks} < 10^0$ maka $T_{eksak} / T_{pendekatan}$ ajeg dan bernilai satu (sebanding). Namun ketika θ_{maks} diperbesar lagi maka perbandingan periode menjadi gayut terhadap simpangan maksimum (amplitudo). Koreksi

ISBN: 978-602-97522-0-5

inilah yang tidak tampak pada persamaan gerak bandul didekati dengan anggapan terjadi simpangan kecil.



Gambar 1. Grafik Peride T (eksak) / T (pendekatan) versus $\theta_{\text{maks.}}$

Dengan Metode Numerik Biasa (metode Simpson), parameter w_i ditentukan sejak awal dan parameter f_i . Tetapi dengan Metode Quadratur Numerik, w_i dihitung, begitu juga f_i dihitung. Dengan demikian menggunakan Metode Quadratur Numerik menjadi lebih rumit (kompleks) tetapi hasilnya mempunyai deviasi yang kecil dan memiliki ketelitian yang tinggi.

KESIMPULAN

Berdasarkan uraian yang dikemukakan sebelumnya, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Dengan menggunakan Quadratur Gauss-Legendre, dapat diselesaikan bentuk integrasi eliptik bentuk pertama, dari akar-akar polynomial Legendre.
2. Untuk $0 < \theta_{\text{maks}} < 10^0$, $T_{\text{eksak}} / T_{\text{pendekatan}}$ nilainya mendekati satu, artinya pada pengambilan θ yang cukup kecil, nilai periode eksak sebanding dengan periode pendekatan.

ISBN: 978-602-97522-0-5

DAFTAR PUSTAKA

Arhami, M., dan A.Desiani, 2005, *Pemrograman Matlab,* Penerbit Andi Yogyakarta.

De Vries, P.L.,1994, *A First Course Computational Physics,* John Wiley & Sons.

Halliday,D dan R.Resnick, 1997, *Fisika I***,** Penerbit Erlangga, Jakarta.

Koonin, S.E. dan D. C.Meredith, 1990, *Computational Physics ; Fortran Version,* Addison-Wesley Publ.Co