SCIENCE days 2010

ISBN : 978-602-97522-0-5

PROSEDDING

SEMINAR NASIONAL BASIC SCIENCE II

Tema:

Kontribusi Sains untuk Pengembangan Pendidikan,

Biodiversitas dan Metigasi Bencana pada Daerah Kepulauan

Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Pattimura

Ambon 2010

ISBN : 978-602-97522-0-5

PROSEDING

SEMINAR NASIONAL BASIC SCIENCE II

Konstribusi Sains Untuk Pengembangan Pendidikan,
Biodiversitas dan Metigasi Bencana
Pada Daerah Kepulauan

SCIENTIFIC COMMITTEE:

Prof. H.J. Sohilait, MS
Prof. Dr. Th. Pentury, M.Si
Dr. J.A. Rupilu, SU
Drs. A. Bandjar, M.Sc
Dr.Ir. Robert Hutagalung, M.Si

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS PATTIMURA
AMBON, 2010

ISBN: 978-602-97522-0-5

ANALISIS SIFAT-SIFAT MATRIKS SENTROSIMETRIK

Rosmalina Tebiary

Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Pattimura Ambon

ABSTRAK

Dalam perkembangan ilmu Ajabar dan teori matriks dikemukakan suatu matriks khusus yakni matriks sentrosimetrik dengan setiap elemen pada matriks tersebut simetrik terhadap pusatnya. Karena itu membuat matriks ini memiliki bentuk dan elemen – elemen yang berada didalam matriks berbeda dengan beberapa matriks yang diketahui. Dengan keistimewaan ini menjamin adanya perbedaan sifat – sifat matriks sentrosimetrik dengan matriks lainnya.

Kata kunci : Sifat-Sifat matriks sentrosimetrik, Matriks, Matriks sentrosimetrik

PENDAHULUAN

Aljabar matriks mempunyai peranan penting pada sebagian besar bidang ilmu, seperti misalnya teorema-teorema khusus dalam aljabar linier dan teori matriks maupun jenis khusus lainnya sering pula digunakan dalam bidang ilmu Numerik, Statistika dan lain-lain. Khususnya teorema-teorema matriks sentrosimetrik sering kali muncul dalam konstruksi ortonormal *wavelet* dasar dianalisis *wavelet.*

Matriks adalah suatu kumpulan besaran (variabel dalam konstanta) yang dapat dirujuk melalui indeksnya, yang menyatakan posisinya dalam representasi umum yang digunakan, yaitu sebuah variabel persegi panjang.

Dalam perkembangan aljabar matriks dikemukakan suatu matriks khusus yakni matriks sentrosimetrik dengan setiap elemen pada matriks tersebut simetrik terhadap pusatnya. Karena itu membuat matriks ini memiliki bentuk dan elemen-elemen didalam matriks yang berbeda dengan beberapa matriks yang diketahui seperti matriks simetri, matriks simetri miring, matriks hermitian, dan lain–lain. Dengan keistimewaan ini menjamin adanya perbedaan sifat-sifat matriks sentrosimetrik dengan matriks lainnya. Hal inilah yang membuat peneliti tertarik untuk melakukan penelitian mengenai **Matriks Sentrosimetrik.**

ISBN: 978-602-97522-0-5

METODE

Metode yang digunakan dalam penulisan ini adalah studi pustaka yaitu mempelajari beberapa literatur yang berupa karangan-karangan ilmiah, *text book* maupun sumber-sumber dari internet.

PEMBAHASAN

Dalam ilmu matematika khususnya dalam aljabar linier dan teori matriks, dikemukakan suatu matriks khusus yakni matriks sentrosimetrik. Matriks Sentrosimetrik adalah suatu matriks yang simetrik terhadap pusatnya. Berikut ini definisi matriks Sentrosimetrik:

Definisi (Matriks Sentrosimetrik)

Diberikan sebuah matriks $=\ {}_{,}\ {}_{\times}$ dengan $\times$, maka matriks disebut matriks sentrosimetrik jika elemen memenuhi hubungan :

$$_{,} = \qquad _{,}$$

Bentuk untuk semua matriks sentrosimetrik misalkan yang berukuran $\times$ adalah sebagai berikut :

$$= \begin{bmatrix} _{,} & _{,} & \cdots & _{,} & _{,} \\ _{,} & _{,} & \cdots & _{,} & _{,} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ _{,} & _{,} & \cdots & _{,} & _{,} \\ _{,} & _{,} & \cdots & _{,} & _{,} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya matriks sentrosimetrik dapat dengan mudah dikenali yakni dengan memeriksanya: Anggota-anggota di pusat matriks boleh sebarang, tetapi anggota-anggota yang bercermin padanya (pusat matriks) harus sama. Hal ini dapat dilihat pada contoh berikut:

Contoh 1

Misalkan $_{\times} =$

Matriks sentrosimetriknya adalah :

ISBN: 978-602-97522-0-5

$$\times =$$

Dari matriks tersebut dapat disimpulkan sebagai berikut :

= simetrik dengan dan = simetrik dengan

Contoh 2

Misalkan $\times =$
h

Matriks sentrosimetriknya adalah :

$$\times =$$

Dengan sebagai pusat simetriknya, dan = simetrik dengan , = simetrik dengan , = simetrik dengan dan = simetrik dengan .

3.1 Sifat-sifat Matriks Sentrosimetrik

Teorema 3.2.1

Diberikan matriks $\in \ ^{\times}$ adalah matriks sentrosimetrik. Jika nonsingular, maka adalah sentrosimetrik.

Bukti :

Diketahui matriks $\in \ ^{\times}$ sentrosimetrik yang nonsingular.

$$= \begin{bmatrix} , & , & \cdots & , & , \\ , & , & \cdots & , & , \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ , & , & \cdots & , & , \\ , & , & \cdots & , & , \end{bmatrix}$$

Misalkan dapat direduksi menjadi bentuk eselon baris dengan operasi-operasi yang berhingga banyaknya dan karena tak singular, maka lebih sederhana untuk mereduksi dalam bentuk segitiga.

Sehingga $| \ | = \pm| \ | = \pm \ \ldots$

ISBN: 978-602-97522-0-5

Selanjutnya dimisalkan dapat direduksi sehingga diperoleh suatu matriks adjoin dari sentrosimetrik $\times$

Jadi jika $| \ | = \pm | \ | = \pm$ ... dan ada adjoin $\times$

Maka $= \frac{}{| \ |}$ adj $\times$ juga matriks sentrosimetrik.

Teorema 3.2.2

Jika $\in \ ^{\times}$ adalah matriks sentrosimetrik, maka adalah matriks sentrosimetrik yang berukuran $\times$.

Bukti :

Diketahui $\in \ ^{\times}$ matriks sentrosimetrik, yang elemennya memenuhi:

$$= \quad ,$$

Akan ditunjukkan adalah matriks sentrosimetrik dengan ukuran $\times$.

Jika $\in \ ^{\times}$ matriks sentrosimetrik maka diperoleh transpos dari $_{\times}$ $(\ )_{\times}$ adalah dengan mempertukarkan baris dan kolom dari $_{\times}$ yaitu kolom pertama dari $(\ )_{\times}$ adalah baris pertama dari $_{\times}$. Jadi anggota dalam baris $- \ + 1$ dan kolom $- \ + 1$ dari $(\ )_{\times}$ adalah anggota dari $- \ + 1$ dan kolom $- \ + 1$ dari $_{\times}$ dan seterusnya sehingga berdasarkan Definisi suatu Transpos Matriks (Definisi 2.2.7) diperoleh

$$, \quad = \quad ,$$
$$= [h \quad , \quad]_{\times}$$

Jadi adalah matriks sentrosimetrik dengan ukuran $\times$

Teorema 3.2.3

Jika kedua matriks dan $\in \ ^{\times}$ adalah matriks sentrosimetrik, maka $\pm$ adalah matriks sentrosimetrik.

Bukti :

Diketahui $\in \ ^{\times}$ matriks sentrosimetrik yang memenuhi:

$$= \quad , \quad _{\times}$$

ISBN: 978-602-97522-0-5

Dan $\in$ $\times$ juga matriks sentrosimetrik yang memenuhi

$$= \quad , \quad \times$$

Akan ditunjukkan $\pm$ matriks sentrosimetrik

Karena matriks $=$ $,$ $\times$ dan $=$ $,$ $\times$ memiliki ukuran yang sama maka berdasarkan definisi penjumlahan dan selisih matriks (Definisi 2.2.2)

Diperoleh :

$$[\ +\ ] \quad , \quad = [\ ] \quad , \quad + [\ ] \quad ,$$
$$= \quad , \quad + \quad ,$$
$$= \quad ,$$

Misalkan $,$ $+$ $,$ $=$ $,$

Karena $[\ +\ ]$ $,$ $=$ $,$ dengan elemennya memenuhi definisi matriks sentrosimetrik maka $+$ adalah matriks sentrosimetrik. Hal yang sama dapat digunakan untuk mencari selisih matriks sentrosimetrik.

Karena matriks $=$ $,$ $\times$ dan $=$ $,$ $\times$ memiliki ukuran yang sama maka berdasarkan definisi penjumlahan dan selisih suatu matriks (Defenisi 2.2.2) diperoleh:

$$[\ -\ ] \quad , \quad = [\ ] \quad , \quad - [\ ] \quad ,$$
$$= \quad , \quad - \quad ,$$
$$= \quad ,$$

Misalkan $,$ $+$ $,$ $=$ $,$

Karena $[\ -\ ]$ $,$ $=$ $,$ dengan elemennya memenuhi definisi matriks sentrosimetrik maka $-$ matriks sentrosimetrik.

Sehingga $\pm$ adalah matriks sentrosimetrik.

Teorema 3.2.4

Jika $\times$ matriks sentrosimetrik atas lapangan maka $\times$ adalah juga matriks sentrosimetrik dengan $\in$

Bukti :

Diketahui $\times$ matriks sentrosimetrik.

ISBN: 978-602-97522-0-5

Ambil sebarang matriks $\times$ sentrosimetrik yang memenuhi

$$= \quad , \quad \times$$

Sehingga:

$$=\begin{bmatrix} , & , & \cdots & , & , \\ , & , & \cdots & , & , \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ , & , & \cdots & , & , \\ , & , & \cdots & , & , \end{bmatrix}$$

Dan c elemen atas lapangan dengan berupa skalar.

Akan ditunjukkan matriks sentrosimetrik yakni:

Berdasarkan definisi perkalian matriks dengan skalar (Definisi 2.2.3) diperoleh

$$= \quad ,$$

$$=\begin{bmatrix} , & , & \cdots & , & , \\ , & , & \cdots & , & , \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ , & , & \cdots & , & , \\ , & , & \cdots & , & , \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} , & , & \cdots & , & , \\ , & , & \cdots & , & , \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ , & , & \cdots & , & , \\ , & , & \cdots & , & , \end{bmatrix}$$

Misalkan:

$$, = , \qquad , = ,$$

$$, = , \qquad , = ,$$

$$, = , \qquad , = ,$$

$$, = , \qquad , = ,$$

Maka:

$$=\begin{bmatrix} , & , & \cdots & , & , \\ , & , & \cdots & , & , \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ , & , & \cdots & , & , \\ , & , & \cdots & , & , \end{bmatrix}$$

$$= \quad ,$$

ISBN: 978-602-97522-0-5

Karena $=$ $,$ memenuhi definisi suatu matriks yang sentrosimetrik maka dapat disimpulkan bahwa juga matriks sentrosimetrik.

Teorema 3.2.5

Jika kedua matriks $\in$ $\times$ dan $\in$ $\times$ adalah matriks sentrosimetrik, maka $\in$ $\times$ adalah matriks sentrosimetrik.

Bukti :

Diketahui $\in$ $\times$ dan $\in$ $\times$ adalah matriks sentrosimetrik.

Ambil $\in$ $\times$ matriks sentrosimetrik yang elemennya memenuhi

$$= \quad , \quad \times$$

Sehingga

$$= \begin{bmatrix} & & \cdots & \\ & & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & & \\ & \cdots & & \end{bmatrix}$$

Dan $\in$ $\times$ matriks sentrosimetrik yang elemennya memenuhi

$$= \quad , \quad \times$$

Sehingga:

$$= \begin{bmatrix} & & \cdots & , & \\ & & \cdots & , & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & , & \cdots & & \\ & , & \cdots & & \end{bmatrix}$$

Akan ditunjukkan $\in$ $\times$

Berdasarkan Definisi (2.2.4)

$$= \quad , \quad ,$$

$$= \begin{bmatrix} & & \cdots & \\ & & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & & \\ & \cdots & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \cdots & , & \\ & & \cdots & , & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & , & \cdots & & \\ & , & \cdots & & \end{bmatrix}$$

ISBN: 978-602-97522-0-5

$$=$$

$$\begin{bmatrix} + \cdots + & + \cdots + \quad , & \cdots & + \cdots + \\ + \cdots + & + \cdots + \quad , & \cdots & + \cdots + \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ + \cdots + & \cdots & + \cdots + \quad , & + \cdots + \\ + \cdots + & \cdots & + \cdots + \quad , & + \cdots + \end{bmatrix}$$

Misalkan:

$$= \quad + \cdots +$$

$$= \quad + \cdots + \quad ,$$

$$= \quad + \cdots +$$

$$= \quad + \cdots +$$

$$= \quad + \cdots + \quad ,$$

$$= \quad + \cdots +$$

Maka

$$= \begin{bmatrix} & & \cdots & , & \\ & & \cdots & , & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & , & \cdots & & \\ & , & \cdots & & \end{bmatrix}$$

Karena $= \quad , \quad \times$

Jadi $= \quad \times$ matriks sentrosimetrik.

Teorema 3.2.6

Jika adalah matriks pertukaran (*exchange matrix*). Maka matriks adalah matriks sentrosimetrik jika dan hanya jika $=$.

Bukti :

($\Rightarrow$) Diketahui : adalah matriks sentrosimetrik yang elemennyamemenuhi:

$$= \quad ,$$

Sehingga

ISBN: 978-602-97522-0-5

$$= \begin{bmatrix} & & \cdots & & \\ & & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \cdots & & \\ & & \cdots & & \end{bmatrix}$$

Berdasarkan Definisi 2.2.9 diperoleh bentuk matriks pertukaran $\times$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Akan ditunjukkan $=$

i. Berdasarkan definisi perkalian dua matriks (Definisi 2.2.4) maka diperoleh

$$= \begin{bmatrix} & & \cdots & & \\ & & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \cdots & & \\ & & \cdots & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$=$

$$\begin{bmatrix} 0+0+\cdots+0+ & 0+0+\cdots+ \quad +0 & \cdots & 0+ \quad +\cdots+0+0 & +0+\cdots+0+0 \\ 0+0+\cdots+0+ & 0+0+\cdots+ \quad +0 & \cdots & 0+ \quad +\cdots+0+0 & +0+\cdots+0+0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0+0+\cdots+0+ & 0+0+\cdots+ \quad +0 & \cdots & 0+ \quad +\cdots+0+0 & +0+\cdots+0+0 \\ 0+0+\cdots+0+ & 0+0+\cdots+ \quad +0 & \cdots & 0+ \quad +\cdots+0+0 & +0+\cdots+0+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} & & \cdots & & \\ & & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \cdots & & \\ & & \cdots & & \end{bmatrix}$$

Selanjutnya

ii. Berdasarkan definisi perkalian dua matriks (Definisi 2.2.4) maka diperoleh

$$= \begin{bmatrix} & & \cdots & & \\ & & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \cdots & & \\ & & \cdots & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ISBN: 978-602-97522-0-5

$$= \begin{bmatrix} 0+0+\cdots+0+ & 0+0+\cdots+0+ & \cdots & 0+0+\cdots+0+ & 0+0+\cdots+0+ \\ 0+0+\cdots+ \quad +0 & 0+0+\cdots+ \quad +0 & \cdots & 0+0+\cdots+ \quad +0 & 0+0+\cdots+ \quad +0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0+ \quad +\cdots+0+0 & 0+ \quad +\cdots+0+0 & \cdots & 0+ \quad +\cdots+0+0 & 0+ \quad +\cdots+0+0 \\ +0+\cdots+0+0 & +0+\cdots+0+0 & \cdots & +0+\cdots+0+0 & +0+\cdots+0+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} & & \cdots & & \\ & & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \cdots & & \\ & & \cdots & & \end{bmatrix}$$

Berdasarkan (i) and (ii) terbukti $=$

$(\Leftarrow)$ Diketahui $=$

Dengan $= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Akan ditunjukan adalah matriks sentrosimetrik

Andaikan $\times$ sebarang matriks

Misalkan $= \begin{bmatrix} , & , & \cdots & , & \\ , & , & \cdots & , & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ , & , & \cdots & , & , \\ , & , & \cdots & , & , \end{bmatrix}$, maka

a. Berdasarkan definisi perkalian dua matriks (Definisi 2.2.4) maka diperoleh

$$= \begin{bmatrix} , & , & \cdots & , & , \\ , & , & \cdots & , & , \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ , & , & \cdots & , & , \\ , & , & \cdots & , & , \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+0+\cdots+0+ & 0+0+\cdots+ \quad +0 & \cdots & 0+ \quad +\cdots+0+0 & +0+\cdots+0+0 \\ 0+0+\cdots+0+ & 0+0+\cdots+ \quad +0 & \cdots & 0+ \quad +\cdots+0+0 & +0+\cdots+0+0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0+0+\cdots+0+ \quad , & 0+0+\cdots+ \quad , \quad +0 & \cdots & 0+ \quad , \quad +\cdots+0+0 & , \quad +0+\cdots+0+0 \\ 0+0+\cdots+0+ \quad , & 0+0+\cdots+ \quad , \quad +0 & \cdots & 0+ \quad , \quad +\cdots+0+0 & , \quad +0+\cdots+0+0 \end{bmatrix}$$

ISBN: 978-602-97522-0-5

$$= \begin{bmatrix} & , & \cdots & , & , \\ & , & \cdots & , & , \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ , & , & \cdots & , & , \\ , & , & \cdots & , & , \end{bmatrix}$$

b. Berdasarkan definisi perkalian dua matriks (Definisi 2.2.4) maka diperoleh

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} , & , & \cdots & , & , \\ , & , & \cdots & , & , \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ , & , & \cdots & , & , \\ , & , & \cdots & , & , \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+0+\cdots+0+ \; , & 0+0+\cdots+0+ \; , & \cdots & 0+0+\cdots+0+ \; , & 0+0+\cdots+0+ \; , \\ 0+0+\cdots+ \; , +0 & 0+0+\cdots+ \; , +0 & \cdots & 0+0+\cdots+ \; , +0 & 0+0+\cdots+ \; , +0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0+ \; +\cdots+0+0 & 0+ \; +\cdots+0+0 & \cdots & 0+ \; +\cdots+0+0 & 0+ \; +\cdots+0+0 \\ +0+\cdots+0+0 & +0+\cdots+0+0 & \cdots & +0+\cdots+0+0 & +0+\cdots+0+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} , & , & \cdots & , & , \\ , & , & \cdots & , & , \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ , & , & \cdots & , & , \\ , & , & \cdots & , & , \end{bmatrix}$$

Berdasarkan (a) dan (b) diperoleh bahwa ternyata $\neq$ dan hal ini kontradiksi dengan yang diketahui bahwa $=$. Sehingga terbukti bahwa harus merupakan matriks sentrosimetrik.

Teorema 3.2.7

Perkalian titik matriks adalah sentrosimetrik jika $=$ $=$ dengan matriks pertukaran.

Bukti :

Diketahui matriks sentrosimetrik

a. Akan ditunjukkan bahwa $=$

Misalkan $=$ matriks sentrosimetrik, maka $=$ berdasarkan Teorema 3.2.6 diperoleh

$$=$$

$$=$$

atau $=$. Jadi terbukti $=$

b. Akan ditunjukkan $=$

ISBN: 978-602-97522-0-5

Berdasarkan Teorema 3.2.5 diketahui bahwa dan B matriks sentrosimetrik sehingga sentrosimetrik.

Karena matriks sentrosimetrik maka $=$ sentrosimetrik (Teorema 3.2.6) .

Sehingga: $= (\quad)$

$= (\quad)$ (Teorema 3.2.5)

$=$

Jadi terbukti $=$

c. Akan ditunjukkan $=$

Berdasarkan Teorema 3.2.5 diketahui bahwa dan B matriks sentrosimetrik sehingga sentrosimetrik.

Misalkan $=$

Karena diketahui bahwa sentrosimetrik maka $=$ $=$ (Teorema 3.2.6)

Sehingga $= (\quad)$

$= (\quad)$

$=$

Jadi terbukti $=$

Berikut ini salah satu contoh yang diberikan untuk membuktikan Teorema 3.2.7

Contoh Soal

Diberikan $\times = \begin{matrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{matrix}$ dan $\times = \begin{matrix} 6 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 6 & 5 \\ 5 & 6 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{matrix}$

Dengan matriks pertukaran

$$\times = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Buktikan $=$ $=$.

Penyelesaian

ISBN: 978-602-97522-0-5

Diketahui $\times = \begin{matrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{matrix}$

Dan $\times = \begin{matrix} 6 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 6 & 5 \\ 5 & 6 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{matrix}$

Pertama akan ditunjukkan bahwa hasil kali juga matriks sentrosimetrik

$$= \begin{matrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{matrix} \begin{matrix} 6 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 6 & 5 \\ 5 & 6 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 12+1+15+4 & 10+4+18+6 & 6+6+12+10 & 4+5+3+12 \\ 24+6+25+4 & 20+24+30+6 & 12+36+20+10 & 8+30+5+12 \\ 12+5+30+8 & 10+20+36+12 & 6+30+24+20 & 4+25+6+24 \\ 12+3+5+4 & 10+12+6+6 & 6+18+4+10 & 4+15+1+12 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 32 & 38 & 34 & 24 \\ 59 & 80 & 78 & 55 \\ 55 & 78 & 80 & 59 \\ 24 & 34 & 38 & 32 \end{matrix}$$

Dari hasil perkalian matriks diatas dapat dilihat bahwa sentrosimetrik.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $=$ $=$

i.

Dengan (matriks pertukaran) :

$$\times = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \begin{matrix} 32 & 38 & 34 & 24 \\ 59 & 80 & 78 & 55 \\ 55 & 78 & 80 & 59 \\ 24 & 34 & 38 & 32 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 0+0+0+24 & 0+0+0+34 & 0+0+0+38 & 0+0+0+32 \\ 0+0+55+0 & 0+0+78+0 & 0+0+80+0 & 0+0+59+0 \\ 0+59+0+0 & 0+80+0+0 & 0+78+0+0 & 0+55+0+0 \\ 32+0+0+0 & 38+0+0+0 & 34+0+0+0 & 24+0+0+0 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 24 & 34 & 38 & 32 \\ 55 & 78 & 80 & 59 \\ 59 & 80 & 78 & 55 \\ 32 & 38 & 34 & 24 \end{matrix}$$

ISBN: 978-602-97522-0-5

ii.

Dengan (matriks pertukaran) : $\times = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$

$$= \begin{matrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 0+0+0+2 & 0+0+3+0 & 0+1+0+0 & 2+0+0+0 \\ 0+0+0+2 & 0+0+5+0 & 0+6+0+0 & 4+0+0+0 \\ 0+0+0+4 & 0+0+6+0 & 0+5+0+0 & 2+0+0+0 \\ 0+0+0+2 & 0+0+1+0 & 0+3+0+0 & 2+0+0+0 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 4 \\ 4 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{matrix}$$

Karena

$$= \begin{matrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 4 \\ 4 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{matrix}$$

Maka

$$= \begin{matrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 4 \\ 4 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 6 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 6 & 5 \\ 5 & 6 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 12+3+5+4 & 10+12+6+6 & 6+18+4+10 & 4+15+1+12 \\ 12+5+30+8 & 10+20+36+12 & 6+30+24+20 & 4+25+6+24 \\ 24+6+25+4 & 20+24+30+6 & 12+36+20+10 & 8+30+5+12 \\ 12+1+15+4 & 10+4+18+6 & 6+6+12+10 & 4+5+3+12 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 24 & 34 & 38 & 32 \\ 55 & 78 & 80 & 59 \\ 59 & 80 & 78 & 55 \\ 32 & 38 & 34 & 24 \end{matrix}$$

iii.

ISBN: 978-602-97522-0-5

Dengan (matriks pertukaran) : $_{\times} = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$

Dan $= \begin{matrix} 32 & 38 & 34 & 24 \\ 59 & 80 & 78 & 55 \\ 55 & 78 & 80 & 59 \\ 24 & 34 & 38 & 32 \end{matrix}$

Maka

$$= \begin{matrix} 32 & 38 & 34 & 24 \\ 59 & 80 & 78 & 55 \\ 55 & 78 & 80 & 59 \\ 24 & 34 & 38 & 32 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 0+0+0+24 & 0+0+34+0 & 0+38+0+0 & 32+0+0+0 \\ 0+0+0+55 & 0+0+78+0 & 0+80+0+0 & 59+0+0+0 \\ 0+0+0+59 & 0+0+80+0 & 0+78+0+0 & 55+0+0+0 \\ 0+0+0+32 & 0+0+38+0 & 0+34+0+0 & 24+0+0+0 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 24 & 34 & 38 & 32 \\ 55 & 78 & 80 & 59 \\ 59 & 80 & 78 & 55 \\ 32 & 38 & 34 & 24 \end{matrix}$$

Berdasarkan (i),(ii) dan (iii) terbukti $\mathrm{JAB} = \mathrm{AJB} = \mathrm{ABJ}$.

KESIMPULAN

Beberapa kesimpulan yang dapat diambil dari pembahasan pada bab - bab sebelumnya adalah sebagai berikut :

1. Matriks sentrosimetrik adalah matriks yang elemen-elemennya simetri terhadap pusatnya dan elemen-elemennya memenuhi hubungan :

   $$_{,} = \qquad _{,}$$

2. Jika $\in \; ^{\times}$ matriks sentrosimetrik yang nonsingular maka adalah sentrosimetrik. Jika $\in \; ^{\times}$ matriks sentrosimetrik, maka adalah matriks sentrosimetrik yang berukuran $\times$
3. Jika dan matriks sentrosimetrik atas lapangan maka $\pm$, , dengan $\in$ adalah matriks sentrosimetrik.
4. Jika dan matriks sentrosimetrik maka $=$ adalah matriks sentrosimetrik dan jika sentrosimetrik maka $= \quad =$, dengan matriks pertukaran.

ISBN: 978-602-97522-0-5

DAFTAR PUSTAKA

Leon,J.H.,(2001), *Aljabar Liniear Dan Aplikasinya,* edisi kelima Erlangga, Jakarta

Anton, H., (2000), *Dasar-dasar Aljabar Linier,* edisi 7 jilid 1, Jakarta

Persulessy,E.R.,(2007) *Aljabar Linier Elementer*, edisi pertama, Ambon

http://en.wikipedia.org/wiki/Centrosymmetric_matrix, 23 November 2009, pk. 12:03 pm

http://math.nju.edu.cn/CiNM/pdf/2005136.pdf, 23 November 2009, pk. 12:03 pm