



Prosiding

SEMINAR NASIONAL *BASIC SCIENCE VI*

*Sains Membangun Karakter dan Berpikir Kritis
Untuk Kesejahteraan Masyarakat*

Ambon, 07 Mei 2014

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS PATTIMURA
AMBON**

Hak cipta dilindungi Undang-Undang

Cetakan I, Agustus 2014

Diterbitkan oleh: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Pattimura

ISBN: 978-602-97552-1-2

Deskripsi halaman sampul : Gambar yang ada pada cover adalah kumpulan benda-benda langit dengan berbagai fenomena

STUDI PERBANDINGAN PENYELESAIAN KASUS BIOMEKANIKA DENGAN MENGGUNAKAN METODE KANE DAN METODE LAGRANGE DALAM ANALISA PERGERAKAN LENGAN ROBOT DAN ANALISA DENGAN MATLAB

V. Galih Vidia Putra¹, Yusril Yusuf²

¹⁾ Lab. Fisika, Jurusan Teknik Tekstil, Sekolah Tinggi Teknologi Tekstil, Bandung

²⁾ Departemen Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta

e-mail: galih_vidia@yahoo.com, Yusril@ugm.ac.id

ABSTRAK

Pemodelan biomekanik gerakan satu dan dua lengan untuk menganalisa bentuk pergerakan lengan robot telah dirancang dengan menggunakan metode Lagrange dan metode Kane dan analisa dengan menggunakan fasilitas software MATLAB. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk memperlihatkan metode yang sesuai dan dapat digunakan untuk sistem gerakan tangan dalam dua dimensi secara biodinamik. Hasil dari penelitian ini, yaitu : 1) Kedua metode dapat digunakan untuk menjelaskan pergerakan lengan robot; 2) Metode Lagrange akan menghasilkan bentuk persamaan dinamik yaitu $M(\theta)\ddot{\theta} + F\dot{\theta} + G(\theta) + E(\theta, \dot{\theta}) = \tau$ dan metode Kane akan menghasilkan bentuk persamaan dinamik yaitu $M(\theta)\ddot{\theta} + G(\theta) + E(\theta, \dot{\theta}) = \tau$; 3) Untuk kasus pengabaian gaya-gaya luar, Metode Lagrange lebih efektif digunakan untuk menganalisa persamaan gerak biodinamik dengan MATLAB dibandingkan dengan metode Kane yang tidak efisien dalam penyelesaian masalah mekanika analitik secara manual, karena membutuhkan waktu yang relative lama, sebaliknya untuk kasus dengan suatu keadaan yang mengharuskan keterlibatan gaya-gaya luar yang rumit untuk diselesaikan, metode Kane akan lebih efektif; 4) Pergerakan lengan robot akan bergantung pada besar torka pada tiap segmen lengan.

Kata kunci: Biomekanik, Metode Kane, Metode Lagrange, MATLAB,

PENDAHULUAN

Metode Lagrange adalah salah satu dari sekian banyak metode dan cara yang digunakan oleh banyak ilmuwan ataupun insinyur untuk mendeskripsikan persamaan gerak suatu sistem mekanik. Metode Lagrange menyediakan sebuah metode dengan tidak menghiraukan gaya interaktif dan juga gaya konstrain yang tidak digunakan untuk melakukan usaha (J.P. Gauthier, dkk)^[1,2]. Menurut Huston hal yang paling tidak menguntungkan dari metode lagrange adalah keharusan untuk mendeferensialkan fungsi energy scalar yaitu energy kinetic dan energy potensial, yang akan memunculkan suatu persamaan dinamik yang cukup sulit untuk dapat dianalisa jika dibandingkan dengan metode kane. (Huston)^[3]

Metode Kane memiliki suatu nilai lebih dibandingkan dengan metode Lagrange dalam menanggulangi kelemahan dari metode Lagrange, dan metode ini dapat digunakan untuk memperlihatkan persamaan gerak tanpa melibatkan gaya-gaya yang tidak berkontribusi secara langsung pada sebuah sistem mekanis. Penelitian penggunaan metode Kane telah banyak dilakukan saat ini, semisal pada kasus untuk menganalisa pukulan smash pada permainan Badminton dan kasus-kasus mekanika klasik [Fazrollrozi]^[4]. Hal senada dikatakan oleh Huston:

Kane's method offers the advantages of both the Newton-Euler and Lagrange methods without the disadvantages. With the use of generalized forces the need for examining interactive and constraint forces between bodies is eliminated. Since Kane's method does not employ the use of energy functions, differentiating is not a problem. The differentiating required to compute velocities and accelerations can be obtained through the use of algorithms based on vector products (Huston)^[3].

Penelitian dengan menggunakan metode Kane dan pensimulasian gerakan lengan robot akan lebih mudah diterapkan dalam menganalisa gerakan biodinamik dibandingkan metode Lagrange. Penelitian ini dilakukan untuk memperlihatkan metode yang paling sesuai untuk diterapkan dalam menganalisa gerakan tangan robot.

PEMODELAN GERAKAN LENGAN ROBOT DENGAN METODE LAGRANGE

Metode Lagrange

Model dinamik persamaan gerak pada sebuah ayunan lengan robot dapat dikonstruksi menggunakan persamaan Lagrange sebagai berikut (J.P. Gauthier, dkk)^[2]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL(q_i, \dot{q}_i)}{d\dot{q}_i} \right) = \frac{dL(q_i, \dot{q}_i)}{dq_i} + \tau_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (1)$$

Dengan q_i adalah sudut-sudut pada sendi yang menghubungkan persegmen lengan, \dot{q}_i adalah besar kecepatan sudut dan τ_i adalah torka pada lengan dan L didefinisikan sebagai berikut:

$$L(q_i, \dot{q}_i) = T(q_i, \dot{q}_i) - V(q_i) \quad (2)$$

dengan T and V adalah energi kinetik total dan energi potensial sistem yang dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$T(q_i, \dot{q}_i) = \sum_{i=1}^n T_i(q_i, \dot{q}_i) \quad \text{dan} \quad V(q_i) = \sum_{i=1}^n V_i(q_i) \quad (3)$$

Dengan $T_i(q_i, \dot{q}_i)$ dan $V_i(q_i)$ adalah energi kinetik dan energi potensial sistem pada setiap sambungan sendi. Untuk menerapkan persamaan Lagrange dalam pergerakan lengan robot, perhitungan mengenai besar energi potensial sistem dan energi kinetik pada setiap sambungan sendinya harus diketahui sebagai suatu fungsi dari sudut θ dan kecepatan sudutnya $\dot{\theta}$, sehingga energi kinetik dan potensial pada sendi-sendinya dapat dituliskan sebagai berikut:

$$T(\theta, \dot{\theta}) = \sum_i \frac{1}{2} (v_i^b)^T M_i v_i^b = \sum_i \frac{1}{2} [\dot{\theta}_i^T J_i^T M_i J_i \dot{\theta}_i] = \frac{1}{2} [\dot{\theta}^T \mathcal{M}(\theta) \dot{\theta}]$$

Dengan M_i adalah *generalized inertia matrix* pada sambungan ke-i dan $\mathcal{M}(\theta)$ adalah *manipulator inertia matrix* dengan J adalah *body Jacobian*.

Besar energi potensial pada sistem dapat dituliskan sebagai berikut:

$$V(\theta) = \sum_i^n m_i g h_i(\theta)$$

dengan :

m_i adalah massa pada sambungan ke- i ;

g adalah konstantan percepatan gravitasi;

$h_i(\theta)$ adalah tinggi dari pusat massa pada terhadap sambungan ke- i (tinggi ini adalah komponen posisi pada pusat massa yang arahnya berlawanan dengan gravitasi).

Maka besar lagrangian adalah:

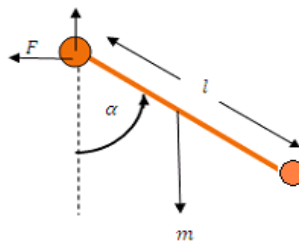
$$L = T(\theta, \dot{\theta}) - V(\theta) = \frac{1}{2} [\dot{\theta}^T \mathcal{M}(\theta) \dot{\theta}] - \sum_i^n m_i g h_i(\theta) = \frac{1}{2} [\mathcal{M}_{ij}(\theta) \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j] - V(\theta)$$

dan persamaan Lagrange-nya adalah

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL(\theta_i, \dot{\theta}_i)}{d\dot{\theta}_i} \right) = \frac{dL(\theta_i, \dot{\theta}_i)}{d\theta_i} + \tau_i \quad (4)$$

Model Pergerakan Tangan *Flexion-Extension* Satu Lengan

Model satu lengan dapat digambarkan sebagai berikut (Tedrake)^[5]:



Gambar-2.1 Model gerakan satu lengan

Persamaan gerak untuk sistem di atas adalah sebagai berikut

$$L = \frac{1}{2} I \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{l^2}{4} \dot{\alpha}^2 \right) + \frac{mgl}{2} \cos(\alpha)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{\alpha}} \right) = \frac{dL}{d\alpha} + Q_j$$

$$\left(I + \frac{ml^2}{4} \right) \ddot{\alpha}(t) + \frac{m}{2} g l \sin(\alpha) = \tau_\alpha$$

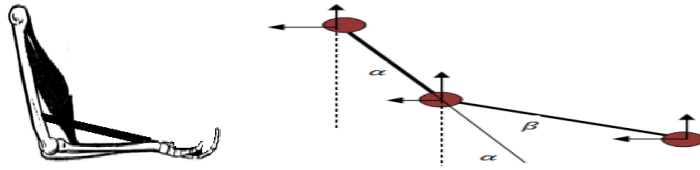
Jika $\tau_\alpha = 0$, maka

$$\left(I + \frac{ml^2}{4} \right) \ddot{\alpha}(t) = -\frac{m}{2} g l \sin(\alpha)$$

Model Pergerakan Tangan *Flexion-Extension* 2 Lengan

Pada pemodelan gerakan tangan ini dianggap bahwa massa lengan adalah m_1 dan m_2 dan panjang tiap lengan adalah l_1 (bahu-siku) dan l_2 (siku-pergelangan tangan) dan besar gaya pada otot bisep dan brachioradialis adalah f , serta g mewakili besar percepatan gravitasi dan besaran α , $\dot{\alpha}$, $\ddot{\alpha}$ dan τ_α mewakili sudut, kecepatan sudut, percepatan sudut dan besar torka yang diberikan

pada daerah bahu hingga siku. β , $\dot{\beta}$, $\ddot{\beta}$ dan τ_β mewakili sudut, kecepatan sudut, percepatan sudut dan besar torka yang diberikan pada daerah siku hingga pergelangan tangan seperti pada Gambar-2.2 (Tedrake)^[5]



Gambar-2.2 Model gerak tangan flexion-extension

Persamaan gerak pada lengan atas adalah

$$L = \frac{1}{2}m_1(L_1)^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}m_2(l_1^2\dot{\alpha}^2 + (L_2)^2(\dot{\alpha}^2 + 2\dot{\alpha}\dot{\beta} + \dot{\beta}^2) + 2l_1(L_2)\dot{\alpha}(\dot{\alpha} + \dot{\beta})\cos(\beta)) + \frac{1}{2}I_1\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}I_2(\dot{\alpha}^2 + 2\dot{\alpha}\dot{\beta} + \dot{\beta}^2) + m_1gL_1\cos\alpha + (m_2g(l_1\cos\alpha + L_2\cos(\alpha + \beta))) - F(l_1\cos\alpha + l_2\cos(\alpha + \beta)) \quad (5)$$

$$\left[(I_1 + I_2 + (m_1)\frac{l_1^2}{4} + m_2l_1^2 + \frac{m_2l_2^2}{4} + m_2l_1l_2\cos\beta \right] \ddot{\alpha} + \left[I_2 + \frac{m_2l_2^2}{4} + \frac{m_2l_1l_2}{2}\cos\beta \right] \ddot{\beta} - \left(\frac{m_2l_1l_2}{2}\dot{\beta}^2 + m_2l_1l_2\dot{\alpha}\dot{\beta} \right) \sin\beta - F(l_1\sin\alpha + l_2\sin(\alpha + \beta)) + (m_2/2)l_2g\sin(\alpha + \beta) + \left[\frac{m_1l_1}{2} + m_2l_1 \right] g\sin\alpha = \tau_\alpha \quad (6)$$

Persamaan gerak pada lengan bawah

$$\left[I_2 + \frac{m_2l_2^2}{4} + \frac{m_2l_1l_2\cos\beta}{2} \right] \ddot{\alpha} + \left[I_2 + \frac{m_2l_2^2}{4} \right] \ddot{\beta} + \frac{m_2l_1l_2}{2}\dot{\alpha}^2\sin\beta + \frac{m_2l_2g}{2}\sin(\alpha + \beta) - F_2l_2\sin(\alpha + \beta) = \tau_\beta \quad (7)$$

Persamaan (2.6) dan persamaan (2.7) dapat dibentuk dalam matrik (M. Murray)^[6]

$$\begin{pmatrix} (I_1 + I_2 + (m_1)\frac{l_1^2}{4} + m_2l_1^2 + \frac{m_2l_2^2}{4} + m_2l_1l_2\cos\beta & I_2 + \frac{m_2l_2^2}{4} + \frac{m_2l_1l_2}{2}\cos\beta \\ I_2 + \frac{m_2l_2^2}{4} + \frac{m_2l_1l_2\cos\beta}{2} & I_2 + \frac{m_2l_2^2}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -m_2l_1l_2\dot{\beta}\sin\beta & -\frac{m_2l_1l_2}{2}\sin\beta\dot{\beta} \\ \frac{m_2l_1l_2}{2}\dot{\alpha}\sin\beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{l_1}{2}\sin\alpha & \frac{l_2}{2}\sin(\alpha + \beta) + \sin\alpha l_1 \\ 0 & \frac{l_2}{2}\sin(\alpha + \beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1g \\ m_2g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F(l_1\sin\alpha + l_2\sin(\alpha + \beta)) \\ -Fl_2\sin(\alpha + \beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_\alpha \\ \tau_\beta \end{pmatrix} \quad (8)$$

Metode Kane

Dengan menggunakan prinsip d'Alembert's untuk kesetimbangan gaya-gaya pada segmen ke-k, maka akan didapatkan persamaan

$$\mathbf{F}_k + \mathbf{F}_k^* + \mathbf{F}_k^c = \mathbf{0}$$

Yang mana $\mathbf{F}_k^* = -\mathbf{m}_k \mathbf{a}_k$, adalah gaya inersia pada segmen ke-k.

Konsep dari virtual work dapat dideskripsikan untuk sebanyak N partikel dengan 3N derajat kebebasan. Sistem konfigurasi dapat dituliskan menjadi q_r ($r = 1, 2, \dots, 3N$) dan koordinat umumnya dengan gaya-gaya F_1, F_2, \dots, F_{3N} yang bekerja pada partikel. *Virtual work* dapat didefinisikan sebagai:

$$\delta W = \sum F_i \delta r_i$$

dimana F_i adalah gaya resultan yang bekerja pada partikel ke-I dan r_i posisi partikel dari kerangka acuan inersia. δr_i adalah *virtual displacement*.

Maka jika komponen gaya-gaya tersebut disubstitusikan ke komponen *virtual work*, persamaannya akan berbentuk

$$\delta W = \sum (\mathbf{F}_k + \mathbf{F}_k^* + \mathbf{F}_k^c) \delta \mathbf{r}_k = \mathbf{0}$$

Jika gaya-gaya konstrainnya diabaikan

$$\mathbf{F}_k^c \delta \mathbf{r}_k = \mathbf{0}$$

Maka persamaan *virtual work*-nya adalah

$$\delta W = \sum (\mathbf{F}_k + \mathbf{F}_k^*) \delta \mathbf{r}_k = \mathbf{0}$$

atau

$$\delta W = \sum (\mathbf{F}_k + \mathbf{F}_k^*) \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_k} \delta q_k = \mathbf{0}$$

Vector posisi dapat dituliskan sebagai:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q, t)$$

Maka

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}(q, t)}{dt} &= q \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + t \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + t \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial t} \\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q} \dot{q} \end{aligned}$$

dengan

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}$$

Sejak pergeseran semu (*virtual displacement*) $\delta \mathbf{q}_k$ adalah sembarang maka persamaannya dapat dituliskan menjadi (F.H.M Ariff, dkk)^[7]:

$$\mathbf{f}_k + \mathbf{f}_k^* = \mathbf{0}$$

$$\delta W = \sum (\mathbf{F}_k + \mathbf{F}_k^*) \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_k} \delta q_k = \sum (\mathbf{F}_k + \mathbf{F}_k^*) \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k = \sum (\mathbf{f}_k + \mathbf{f}_k^*) = \mathbf{0}$$

Dapat dilakukan dengan cara yang sama, maka moment dapat dituliskan sebagai:

$$\mathbf{M}_k + \mathbf{M}_k^* = \mathbf{0}$$

Dengan

$$M_k = \tau_k \frac{\partial \dot{\theta}_k}{\partial \dot{q}_k}$$

$$M_k^* = -(\dot{\theta}_k \cdot I + \dot{\theta}_k \times I \cdot \dot{\theta}_k) \frac{\partial \dot{\theta}_k}{\partial \dot{q}_k}$$

maka persamaan Kane adalah:

$$F_k + F_k^* = 0$$

Dengan

$$F_k = f_k + M_k$$

$$F_k^* = f_k^* + M_k^*$$

Model Gerakan Satu Lengan

Model pergerakan lengan dengan satu segmen dapat dirancang seperti pada Gambar-3.1.

Beberapa notasi yang digunakan dalam metode Kane adalah

$q_r = \text{koordinat umum}$

$$u_r = \frac{dq_r}{dt}$$

${}^N v^P = \text{kecepatan } P \text{ pada kerangka acuan inersia}$

${}^N v^{A*} = \text{kecepatan pada massa central } A$

${}^N v_r^P = \text{kecepatan parsial } P$

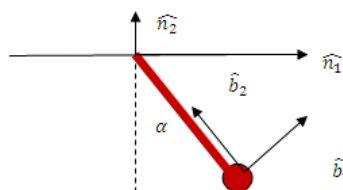
$F_r \cdot {}^N v_r^P + F_r^* \cdot {}^N v_r^P = 0$; persamaan gaya – gaya

Dengan

$$F_r = \sum F_A \cdot {}^N v_r^A + \tau_A \cdot {}^N \omega_r^A + F_B \cdot {}^N v_r^B + \tau_B \cdot {}^N \omega_r^B \tag{9}$$

$$F_r^* = \sum -m^A \alpha^A \cdot {}^N v_r^A - ({}^N \alpha^A \cdot I + {}^N \omega_r^A \times I \cdot {}^N \omega_r^A) \cdot {}^N v_r^A$$

$$-m^B \alpha^B \cdot {}^N v_r^B - ({}^N \alpha^B \cdot I + {}^N \omega_r^B \times I \cdot {}^N \omega_r^B) \cdot {}^N v_r^B$$



Gambar-3.1 Model pergerakan satu lengan

Hubungan antara koordinat lama dan koordinat baru dapat diperlihatkan pada Tabel-1 di bawah

Tabel-1 transformasi koordinat

${}^N R^b$	\hat{b}_1	\hat{b}_2	\hat{b}_3
\hat{n}_1	$\text{Cos} \alpha$	$-\text{sin } \alpha$	0
\hat{n}_2	$\text{sin } \alpha$	$\text{cos } \alpha$	0
\hat{n}_3	0	0	1

Koordinat umum

$$q_1 = \alpha \hat{b}_3$$

$$\frac{dq_1}{dt} = u_1$$

Kecepatan pada kerangka acuan inersia

$$\begin{aligned} {}^N\omega^P &= u_1 \hat{b}_3 \\ {}^Nv^P &= {}^N\omega^P \times r^{n-p} \\ {}^Nv^P &= u_1 \hat{b}_3 \times -L\hat{b}_2 = u_1 L\hat{b}_1 \end{aligned}$$

Percepatan pada kerangka acuan inersia

$$\begin{aligned} {}^N\alpha^P &= \dot{u}_1 \hat{b}_3 + u_1 \frac{d\hat{b}_3}{dt} \\ {}^N\alpha^P &= \dot{u}_1 L\hat{b}_1 + u_1 L \frac{d\hat{b}_1}{dt} = \dot{u}_1 L\hat{b}_1 - u_1^2 L\hat{b}_2 \end{aligned}$$

Kecepatan parsial

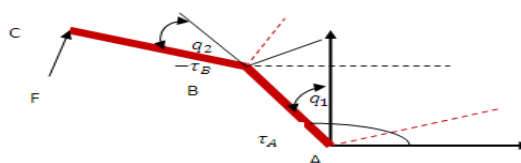
$$\begin{aligned} {}^N\omega_1^P &= \hat{b}_3 \\ {}^Nv_1^P &= \frac{d{}^Nv^P}{du_1} = \frac{d(u_1 L\hat{b}_1)}{du_1} = L\hat{b}_1 \\ F_r + F_r^* &= 0 \\ F_r &= \sum F_A \cdot {}^Nv_r^A = -mg\hat{n}_2 \cdot L\hat{b}_1 \\ F_r^* &= \sum -m {}^N\alpha^A \cdot {}^Nv_r^A - ({}^N\alpha^A \cdot I + {}^N\omega_r^A \times I \cdot {}^N\omega_r^A) {}^N\omega_r^A \\ &\quad - m {}^N\alpha^B \cdot {}^Nv_r^B - ({}^N\alpha^B \cdot I + {}^N\omega_r^B \times I \cdot {}^N\omega_r^B) {}^N\omega_r^B \\ &= [-mg\hat{n}_2 \cdot {}^Nv_r^P] + [-m {}^N\alpha^P \cdot {}^Nv_r^P - {}^N\alpha^A \cdot I \cdot {}^N\omega_r^A] = 0 \\ &= [-mg\hat{n}_2 \cdot L\hat{b}_1] - [m(\dot{u}_1 L\hat{b}_1 - u_1^2 L\hat{b}_2) \cdot L\hat{b}_1 - I\dot{u}_1] = 0 \\ &= mgL \sin\alpha + m\dot{u}_1 L^2 + I\dot{u}_1 = 0 \end{aligned}$$

Jika disetting bahwa $L = l/2$ dan $u_1 = \ddot{\alpha}(t)$

$$\left(I + \frac{ml^2}{4}\right) \ddot{\alpha}(t) = -\frac{m}{2} gl \sin(\alpha) \quad (10)$$

Model Gerakan Dua Lengan

Pada pemodelan gerakan tangan ini dianggap bahwa massa lengan adalah m_A dan m_B dan panjang tiap lengan adalah l dan besar gaya pada otot bisep dan brachioradialis adalah f , serta g mewakili besar percepatan gravitasi dan besaran $q_1, \dot{q}_1, \ddot{q}_1$ dan τ_α mewakili sudut, kecepatan sudut, percepatan sudut dan besar torka yang diberikan pada daerah bahu hingga siku. $q_2, \dot{q}_2, \ddot{q}_2$ dan τ_β mewakili sudut, kecepatan sudut, percepatan sudut dan besar torka yang diberikan pada daerah siku hingga pergelangan tangan seperti pada seperti pada Gambar-3.2 (F.H.M Ariff, dkk)^[8]



Gambar-3.2 Model pergerakan dua lengan

Hubungan antara koordinat lama dan koordinat baru dapat diperlihatkan pada Tabel-2, Tabel-3 dan Tabel-4 di bawah

Tabel-2 Transformasi koordinat benda A relative terhadap kerangka N

${}^N R^A$	\hat{a}_1	\hat{a}_2	\hat{a}_3
\hat{n}_1	$\cos q_1$	$-\sin q_1$	0
\hat{n}_2	$\sin q_1$	$\cos q_1$	0
\hat{n}_3	0	0	1

Tabel-3 Transformasi koordinat benda B relative terhadap kerangka benda A

${}^A R^B$	\hat{b}_1	\hat{b}_2	\hat{b}_3
\hat{a}_1	$\cos q_2$	$-\sin q_2$	0
\hat{a}_2	$\sin q_2$	$\cos q_2$	0
\hat{a}_3	0	0	1

Tabel-4 Transformasi koordinat benda B relative terhadap kerangka N

${}^N R^B$	\hat{b}_1	\hat{b}_2	\hat{b}_3
\hat{n}_1	$\cos(q_2 + q_1)$	$-\sin(q_2 + q_1)$	0
\hat{n}_2	$\sin(q_2 + q_1)$	$\cos(q_2 + q_1)$	0
\hat{n}_3	0	0	1

Koordinat umum

$$q_1 = \alpha \hat{a}_3 \quad (11)$$

$$q_2 = \beta \hat{b}_3 \quad (12)$$

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{d}{dt} [\alpha \hat{a}_3] = u_1 \hat{a}_3 \quad (13)$$

$$\frac{d}{dt} [(\alpha + \beta) \hat{b}_3] = (u_1 + u_2) \hat{b}_3 \quad (14)$$

Kecepatan pada kerangka acuan inersia

$${}^N \omega^A = u_1 \hat{a}_3 \text{ dan } {}^N \alpha^A = \dot{u}_1 \hat{a}_3; \text{ kecepatan dan percepatan benda A di kerangka N} \quad (15)$$

$${}^N \omega^B = (u_1 + u_2) \hat{b}_3 \text{ dan } {}^N \alpha^B = (\dot{u}_1 + \dot{u}_2) \hat{b}_3; \text{ kecepatan dan percepatan benda B di kerangka N} \quad (16)$$

$${}^N v^{A*}(\text{pusat massa}) = {}^N \omega^A \times r^{N-A*} = u_1 \hat{a}_3 \times L \hat{a}_2 = u_1 L \hat{a}_1 \quad (17)$$

$${}^N v^A = u_1 \hat{a}_3 \times -l \hat{a}_2 = u_1 l \hat{a}_1 \quad (18)$$

$${}^N v^{B*}(\text{pusat massa}) = {}^N \omega^A \times r^{N-A} + [{}^N \omega^B \times r^{A-B}] = u_1 l \hat{a}_1 + [u_1 + u_2] L \hat{b}_1 \quad (19)$$

$${}^N v^B = u_1 l \hat{a}_1 + [u_1 + u_2] l \hat{b}_1 \quad (20)$$

Percepatan pada kerangka acuan inersia

$${}^N a^{A*}(\text{pusat massa}) = \dot{u}_1 L \hat{b}_1 + u_1 L \frac{d\hat{b}_1}{dt} = \dot{u}_1 L \hat{a}_1 - u_1^2 L \hat{a}_2 \quad (21)$$

$${}^N a^{B*}(\text{pusat massa}) = \dot{u}_1 l \hat{a}_1 - u_1^2 l \hat{a}_2 + (\dot{u}_1 + \dot{u}_2) L \hat{b}_1 - (u_2 + u_1)^2 L \hat{b}_2 \quad (22)$$

Kecepatan parsial

$${}^N \omega_1^{A*} = \hat{a}_3 \quad (23)$$

$${}^N \omega_1^{B*} = \hat{b}_3 \quad (24)$$

$${}^N \omega_2^{A*} = 0 \quad (25)$$

$${}^N \omega_2^{B*} = \hat{b}_3 \quad (26)$$

$${}^N v_1^{A*} = \frac{d {}^N v^{A*}}{du_1} = \frac{d(u_1 L \hat{b}_1)}{du_1} = L \hat{a}_1 \quad (27)$$

$${}^N v_1^{B*} = \frac{d {}^N v^{B*}}{du_1} = l \hat{a}_1 + L \hat{b}_1 \quad (28)$$

$${}^N v_2^{B*} = \frac{d {}^N v^{B*}}{du_2} = L \hat{b}_1 \quad (29)$$

$${}^N v_1^C = \frac{d {}^N v^{B*}}{du_1} = l \hat{a}_1 + l \hat{b}_1 \quad (30)$$

$${}^N v_2^C = \frac{d {}^N v^{B*}}{du_2} = l \hat{b}_1 \quad (31)$$

$$F_r + F_r^* = 0$$

$$F_r = \sum F_A \cdot {}^N v_r^A + \tau_A \cdot {}^N \omega_r^A + F_B \cdot {}^N v_r^B + \tau_B \cdot {}^N \omega_r^B$$

Untuk F_1

$$F_1 = F_A \cdot {}^N v_1^A + \tau_A \cdot {}^N \omega_1^A + F_B \cdot {}^N v_1^B + \tau_B \cdot {}^N \omega_1^B + {}^N v_1^C \cdot F$$

$$F_1 = -m_A g \hat{n}_2 \cdot {}^N v_1^{A*} + \tau_A \cdot {}^N \omega_1^A + -m_B g \hat{n}_2 \cdot {}^N v_1^{B*} + \tau_B \cdot {}^N \omega_1^B + {}^N v_1^C \cdot F$$

$$F_1 = -m_A g \hat{n}_2 \cdot L\hat{a}_1 + (\tau_{N/A} - \tau_{A/B}) \cdot {}^N \omega_1^A - m_B g \hat{n}_2 \cdot (l\hat{a}_1 + L\hat{b}_1) + \tau_{A/B} \cdot {}^N \omega_1^B + {}^N v_1^C \cdot F$$

$$F_1 = -m_A g L \sin(q_1) + (\tau_{N/A} - \tau_{A/B}) \cdot {}^N \omega_1^A - m_B g (l \sin(q_1) + L \sin(q_1 + q_2)) + \tau_{A/B} \cdot {}^N \omega_1^B$$

$$+ (l\hat{a}_1 + L\hat{b}_1) \cdot f \hat{n}_2$$

$$F_1 = -m_A g L \sin(q_1) - m_B g (l \sin(q_1) + L \sin(q_1 + q_2)) + f (l \sin(q_1) + L \sin(q_1 + q_2)) + \tau_{A/B} \hat{b}_3$$

$$+ (\tau_{N/A} - \tau_{A/B}) \hat{a}_3$$

Untuk F_2

$$F_2 = F_A \cdot {}^N v_2^{A*} + \tau_A \cdot {}^N \omega_2^A + F_B \cdot {}^N v_2^{B*} + \tau_B \cdot {}^N \omega_2^B + {}^N v_2^C \cdot F$$

$$F_2 = -m_A g \hat{n}_2 \cdot 0 + \tau_A \cdot {}^N \omega_2^A + -m_B g \hat{n}_2 \cdot L\hat{b}_1 + \tau_B \cdot {}^N \omega_2^B + l\hat{b}_1 \cdot f \hat{n}_2$$

$$F_2 = -m_B g L \sin(q_2 + q_1) + f l \sin(q_1 + q_2) + \tau_A \cdot {}^N \omega_2^A + \tau_B \cdot {}^N \omega_2^B$$

$$F_r^* = \sum -m_A \cdot {}^N a^{A*} \cdot {}^N v_r^{A*} - ({}^N \alpha^A \cdot I + {}^N \omega_r^A \times I \cdot {}^N \omega_r^A) \cdot {}^N \omega_r^A$$

$$- m_B \cdot {}^N a^{B*} \cdot {}^N v_r^{B*} - ({}^N \alpha^B \cdot I + {}^N \omega_r^B \times I \cdot {}^N \omega_r^B) \cdot {}^N \omega_r^B$$

Untuk F_1^*

$$F_1^* = (-m_A \cdot {}^N a^{A*} \cdot {}^N v_1^{A*}) + (-{}^N \alpha^A \cdot I \cdot {}^N \omega_1^A) + (-m_B \cdot {}^N a^{B*} \cdot {}^N v_1^{B*}) + (-{}^N \alpha^B \cdot I \cdot {}^N \omega_1^B)$$

$$F_1^* = -m_A (\dot{u}_1 L \hat{a}_1 + u_1^2 L \hat{a}_2) \cdot L \hat{a}_1 - {}^N \alpha^A \cdot I \cdot {}^N \omega_1^A - m_B$$

$$(\dot{u}_1 l \hat{a}_1 - u_1^2 l \hat{a}_2 + (\dot{u}_1 + \dot{u}_2) L \hat{b}_1 - (u_2 + u_1)^2 L \hat{b}_2) \cdot (l \hat{a}_1 + L \hat{b}_1) - {}^N \alpha^B \cdot I \cdot {}^N \omega_1^B$$

$$F_1^* = -m_A (\dot{u}_1 L^2) - m_B (\dot{u}_1 l^2) - m_B (\dot{u}_1 + \dot{u}_2) L^2 - {}^N \alpha^A \cdot I \cdot {}^N \omega_1^A - {}^N \alpha^B \cdot I \cdot {}^N \omega_1^B \quad (32)$$

Untuk F_2^*

$$F_2^* = -m_A \cdot {}^N a^{A*} \cdot {}^N v_2^{A*} - {}^N \alpha^A \cdot I \cdot {}^N \omega_2^A - m_B \cdot {}^N a^{B*} \cdot {}^N v_2^{B*} - {}^N \alpha^B \cdot I \cdot {}^N \omega_2^B$$

$$F_2^* = -{}^N \alpha^A \cdot I \cdot {}^N \omega_2^A - m_B \cdot {}^N a^{B*} \cdot L \hat{b}_1 - {}^N \alpha^B \cdot I \cdot {}^N \omega_2^B$$

$$F_2^* = -{}^N \alpha^A \cdot I \cdot {}^N \omega_2^A - m_B (\dot{u}_1 l \hat{a}_1 - u_1^2 l \hat{a}_2 + (\dot{u}_1 + \dot{u}_2) L \hat{b}_1 - (u_2 + u_1)^2 L \hat{b}_2) \cdot L \hat{b}_1 - {}^N \alpha^B \cdot I \cdot {}^N \omega_2^B$$

$$F_2^* = -{}^N \alpha^A \cdot I \cdot {}^N \omega_2^A - {}^N \alpha^B \cdot I \cdot {}^N \omega_2^B - m_B (\dot{u}_1 + \dot{u}_2) L^2 \quad (33)$$

Persamaan gaya-gaya

$$F_1 + F_1^* = 0$$

$$-m_A g L \sin(q_1) - m_B g (l \sin(q_1) + L \sin(q_1 + q_2)) + f (l \sin(q_1) + L \sin(q_1 + q_2)) - \tau_{A/B} \hat{b}_3 +$$

$$(\tau_{N/A} - \tau_{A/B}) \hat{a}_3 - m_A (\dot{u}_1 L^2) - m_B (\dot{u}_1 l^2) - m_B (\dot{u}_1 + \dot{u}_2) L^2 - {}^N \alpha^A \cdot I \cdot {}^N \omega_1^A - {}^N \alpha^B \cdot I \cdot {}^N \omega_1^B = 0$$

$$(34)$$

$$F_2 + F_2^* = 0$$

$$-m_B g L \sin(q_2 + q_1) + f l \sin(q_1 + q_2) + \tau_{A/B} \cdot {}^N \omega_2^B - {}^N \alpha^B \cdot I \cdot {}^N \omega_2^B - m_B (\dot{u}_1 + \dot{u}_2) L^2 = 0$$

$$[I_B + m_B L^2] \dot{u}_1 + [I_B + m_B L^2] \dot{u}_2 + m_B g L \sin(q_2 + q_1) - f l \sin(q_1 + q_2) = \tau_{A/B} \hat{b}_3 \quad (35)$$

Dalam bentuk matrik persamaan gerak di atas dapat dituliskan menjadi (Fazrolrozi)^[4]

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} I_A + I_B + m_A L^2 + m_B l^2 + m_B L^2 & I_B + m_B L^2 \\ I_B + m_B L^2 & I_B + m_B L^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L \sin q_1 & L \sin(q_1 + q_2) + L \sin q_1 \\ 0 & L \sin(q_2 + q_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 g \\ m_2 g \end{pmatrix} \\
& + \begin{pmatrix} -f(l \sin q_1 + l \sin(q_1 + q_2)) \\ -f l \sin(q_1 + q_2) \end{pmatrix} \\
& = \begin{pmatrix} (\tau_{N/A} - \tau_{A/B}) \hat{a}_3 - \tau_{A/B} \hat{b}_3 \\ \tau_{A/B} \hat{b}_3 \end{pmatrix} \tag{36}
\end{aligned}$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada analisa biodinamik dengan menggunakan metode kane akan didapatkan persamaan gerakan yaitu:

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} I_A + I_B + m_A L^2 + m_B l^2 + m_B L^2 & I_B + m_B L^2 \\ I_B + m_B L^2 & I_B + m_B L^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} + \\
& \begin{pmatrix} L \sin q_1 & L \sin(q_1 + q_2) + L \sin q_1 \\ 0 & L \sin(q_2 + q_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 g \\ m_2 g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -f(l \sin q_1 + l \sin(q_1 + q_2)) \\ -f l \sin(q_1 + q_2) \end{pmatrix} = \\
& \begin{pmatrix} (\tau_{N/A} - \tau_{A/B}) \hat{a}_3 - \tau_{A/B} \hat{b}_3 \\ \tau_{A/B} \hat{b}_3 \end{pmatrix}; L = \text{panjang pusat massa dan } l = \text{panjang lengan} \tag{37}
\end{aligned}$$

Bentuk Persamaan gerak dengan metode Lagrange secara umum adalah:

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} (I_1 + I_2 + (m_1) \frac{l^2}{4} + m_2 l^2 + \frac{m_2 l^2}{4} + m_2 l^2 \cos \beta & I_2 + \frac{m_2 l^2}{4} + \frac{m_2 l^2}{2} \cos \beta \\ I_2 + \frac{m_2 l^2}{4} + \frac{m_2 l^2 \cos \beta}{2} & I_2 + \frac{m_2 l^2}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{pmatrix} \\
& + \begin{pmatrix} -m_2 l^2 \dot{\beta} \sin \beta & -\frac{m_2 l^2}{2} \sin \beta \dot{\beta} \\ \frac{m_2 l^2}{2} \dot{\alpha} \sin \beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{pmatrix} \\
& + \begin{pmatrix} \frac{l}{2} \sin \alpha & \frac{l}{2} \sin(\alpha + \beta) + \sin \alpha l \\ 0 & \frac{l}{2} \sin(\alpha + \beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 g \\ m_2 g \end{pmatrix} \\
& + \begin{pmatrix} -f l (\sin \alpha + \sin(\alpha + \beta)) \\ -f l \sin(\alpha + \beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_\alpha \\ \tau_\beta \end{pmatrix} \tag{38}
\end{aligned}$$

Pada pers.(38) tampak bahwa persamaan dinamik gerakan tangan adalah berbentuk

$$M(\theta)\ddot{\theta} + F\dot{\theta} + G(\theta) + E(\theta, \dot{\theta}) = \tau$$

Jika pada pers. (38) dilakukan eliminasi pada gaya-gaya yang tidak berkontribusi secara langsung pada gerakan ayunan tangan (*noncontributing forces*) pada komponen F dan dilakukan penyederhanaan gerakan tangan dalam bentuk sederhana seperti pada hasil analisa gerak tangan dengan metode Kane, maka bentuk Lagragian pada per. (5) haruslah memiliki bentuk pers.(39)

$$\begin{aligned}
L = & \frac{1}{2} m_1 (L_1)^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m_2 (l_1^2 \dot{\alpha}^2 + (L_2)^2 (\dot{\alpha}^2 + 2\dot{\alpha}\dot{\beta} + \dot{\beta}^2)) + \frac{1}{2} I_1 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} I_2 (\dot{\alpha}^2 + 2\dot{\alpha}\dot{\beta} + \dot{\beta}^2) + \\
& m_1 g L_1 \cos \alpha + (m_2 g (l_1 \cos \alpha + L_2 \cos(\alpha + \beta)) - F (l_1 \cos \alpha + l_2 \cos(\alpha + \beta))) \tag{39}
\end{aligned}$$

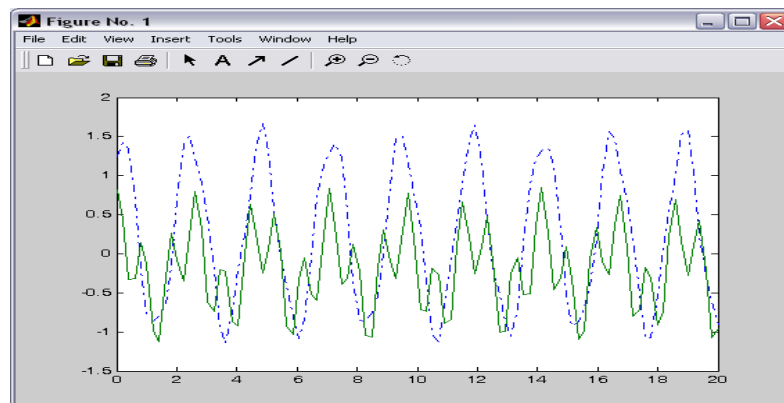
Sehingga bentuk persamaannya adalah pers.(40)

$$\begin{pmatrix} (I_1 + I_2 + (m_1)\frac{l^2}{4} + m_2l^2 + \frac{m_2l^2}{4}) & I_2 + \frac{m_2l^2}{4} \\ I_2 + \frac{m_2l^2}{4} & I_2 + \frac{m_2l^2}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{l}{2}\sin\alpha & \frac{l}{2}\sin(\alpha + \beta) + \sin\alpha l \\ 0 & \frac{l}{2}\sin(\alpha + \beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1g \\ m_2g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -fl(\sin\alpha + \sin(\alpha + \beta)) \\ -fl\sin(\alpha + \beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_\alpha \\ \tau_\beta \end{pmatrix} \quad (40)$$

Tampak bahwa pada metode Lagrange terdapat gaya-gaya interaksi pada siku-siku tangan yang berkontribusi dalam perumusan persamaan gerak. Jika gaya-gaya interaksi tersebut diabaikan, dari persamaan (37) dan persamaan (40) dapat diperlihatkan bahwa kedua metode memperlihatkan hasil yang sama. Metode Lagrange lebih efektif dan lebih baik digunakan dalam menganalisa gerakan lengan dua segmen dan satu segmen secara lebih ringkas dibandingkan dengan metode Kane. Metode Kane memiliki suatu keuntungan yaitu dalam melakukan analisa gerak dinamis yang memerlukan suatu analisa gaya-gaya luar yang mempengaruhi system tersebut, sehingga metode ini sangat sesuai untuk system yang terpengaruh gaya-gaya luar yang mempengaruhi pergerakannya. Penyederhanaan persamaan dengan mengeliminasi gaya-gaya yang tidak berkontribusi secara langsung pada gerakan ayunan tangan (*noncontributing forces*) di komponen F, maka dapat diperlihatkan bahwa persamaan gerak tidak bergantung pada perkalian dari panjang dua lengan yang berbeda, sehingga bentuk persamaan dinamik adalah (Everett)^[9]

$$M(\theta)\ddot{\theta} + G(\theta) + E(\theta) = \tau$$

Hasil analisa gerak biodinamik satu lengan dan dua lengan baik dengan menggunakan metode Kane dan metode Lagrange memperlihatkan hasil yang relative sama, hanya saja pada metode Lagrange harus dikondisikan bahwa kecepatan gerak robot sangat kecil, sehingga komponen kecepatan akan lenyap. Hasil grafik hubungan sudut α dan β dapat diperlihatkan pada Gambar-4.1



Gambar-4.1 a) Garis putus-putus menunjukkan besar sudut lengan atas, b) Garis lurus menunjukkan besar sudut lengan bawah pada waktu tertentu Menurut pers (38) di atas percepatan gerak lengan pada gerakan lengan robot secara keseluruhan akan bergantung pada besar torka yang dilakukan oleh lengan atas dan lengan bawah. Secara umum dapat dikatakan

bahwa adanya ketergantungan pada sudut apit dalam menentukan besar torka yang maksimal, sehingga mampu menghasilkan gerakan yang baik. Sudut lengan atas memiliki RoM (*Range of Movement*) yang lebih besar dibandingkan RoM sudut lengan bawah, maka dari hasil ini dapat disimpulkan bahwa torka pada lengan atas akan lebih besar dibandingkan dengan torka pada lengan bawah.

KESIMPULAN

Bertitik tolak dari dasar teori dan analisa kedua metode dalam pergerakan lengan robot , maka dapat diambil beberapa kesimpulan yaitu:

1) Kedua metode dapat digunakan untuk menjelaskan pergerakan lengan robot; 2) Metode Lagrange akan menghasilkan bentuk persamaan dinamik yaitu $M(\theta)\ddot{\theta} + F\dot{\theta} + G(\theta) + E(\theta, \dot{\theta}) = \tau$ dan metode Kane akan menghasilkan bentuk persamaan dinamik yaitu $M(\theta)\ddot{\theta} + G(\theta) + E(\theta, \dot{\theta}) = \tau$; 3) Untuk kasus pengabaian gaya-gaya luar, Metode Lagrange lebih efektif digunakan untuk menganalisa persamaan gerak biodinamik dengan MATLAB dibandingkan dengan metode Kane yang tidak efisien dalam penyelesaian masalah mekanika analitik secara manual, karena membutuhkan waktu yang relative lama, sebaliknya untuk kasus dengan suatu keadaan yang mengharuskan keterlibatan gaya-gaya luar yang rumit untuk diselesaikan, metode Kane akan lebih efektif; 4) Pergerakan lengan robot akan bergantung pada besar torka pada tiap segmen lengan.

DAFTAR PUSTAKA

- [1]J.-P. Gauthier and I. Kupka, ,2001, *Deterministic Observation Theory and Applications* ,Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- [2]J.P. Gauthier, dkk., 2010,“ A Biomechanical Inactivation Principle”Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2010, Vol. 268, pp. 93–116.
- [3]Huston, Ronald L. Multibody Dynamics. Boston: Butterworth-Heinemann, 1990
- [4]Fazrolrozi, 2009, A Model for Two-Link Kinematic Chain of Lower Limb Using Kane’s Method from a jumping Smash Activity, *European Journal of Scientific Research*ISSN 1450-216X Vol.31 No.4 (2009), pp.500-509.
- [5]Tedrake, 2009,Underactuated Robotics:Learning, Planning, and Control for E_cient and Agile Machines Course Notes for MIT 6.832, MIT
- [6]M. Murray, 1994, A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation, California Institute of Technology ,(http://www.cds.caltech.edu/~murray/mlswiki). [7]F.H.M Ariff, dkk. 2009,Modeling of An Arm Via Kane’s Method: An Inverse Dynamic Approach, *European Journal of Scientific Research* ISSN 1450-216X Vol.33 No.2 (2009), pp.358-364.
- [8]F.H.M Ariff, dkk. 2008,AN OVERVIEW OF KANE’S METHOD, Faculty of Engineering Universiti Kebangsaan Malaysia 43600 Bangi, Selangor
- [9]Everett, 1989, An Extension of Kane’s Method for Deriving Equations of Motions of Flexible Manipulator,IEEE, CH2750-8/89/0000/0716, 716-721