



Prosiding

SEMINAR NASIONAL *BASIC SCIENCE VI*

*Sains Membangun Karakter dan Berpikir Kritis
Untuk Kesejahteraan Masyarakat*

Ambon, 07 Mei 2014

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS PATTIMURA
AMBON**

Hak cipta dilindungi Undang-Undang

Cetakan I, Agustus 2014

Diterbitkan oleh: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Pattimura

ISBN: 978-602-97552-1-2

Deskripsi halaman sampul : Gambar yang ada pada cover adalah kumpulan benda-benda langit dengan berbagai fenomena

METODE ITERASI UNTUK SISTEM LINEAR *SPARSE*

Zeth Arthur Leleury*

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Pattimura
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Poka, Ambon

**e-mail* : zaleleury@yahoo.co.id / zetharthur82@gmail.com

ABSTRAK

Bentuk sistem linier *sparse* $Au = f$ dapat diturunkan berdasarkan pada konsep metode beda hingga. Sistem linier ini dapat diselesaikan dengan menggunakan metode langsung dan metode iterasi namun metode yang dipilih akan menentukan keakuratan penyelesaian sistem linier tersebut. Metode iterasi digunakan untuk menyelesaikan sistem linier ketika matriksnya berukuran besar sehingga dapat menghemat proses perhitungan komputasi. Dalam penelitian ini digunakan tiga metode iterasi untuk mencari solusi pendekatan dari sistem linier *sparse* yaitu metode iterasi Jacobi, Gauss-Seidel dan *Successive Over Relaxation*. Ketiga metode ini dianalisis berdasarkan *splitting* dari matriks A . Selanjutnya ketiga metode iterasi tersebut dibandingkan untuk mengetahui metode iterasi terbaik. Berdasarkan hasil penelitian, metode *Successive Over Relaxation* mempunyai laju konvergensi yang lebih cepat dibandingkan dengan kedua metode iterasi lainnya.

Kata kunci : Sistem linier *sparse*, Metode Jacobi, Metode Gauss-Seidel, Metode *Successive Over Relaxation*, *Splitting* matriks.

PENDAHULUAN

Salah satu permasalahan yang penting dalam matematika adalah menyelesaikan sistem linear. Untuk memperoleh solusi dari sistem linear tersebut, dapat digunakan dua pendekatan yaitu metode langsung dan metode iterasi. Kedua metode tersebut mempunyai kelemahan dan keunggulan. Metode yang dipilih akan menentukan keakuratan penyelesaian sistem tersebut. Dalam kasus tertentu yaitu untuk sistem yang besar, metode iterasi lebih cocok digunakan (Nugroho, 2008).

Metode langsung bekerja dalam sejumlah langkah yang dapat ditebak dan akan secara langsung mengakhiri operasi yang ada dengan sebuah solusi eksak, salah satu jenis metode dari pendekatan ini yang banyak digunakan adalah Eliminasi Gauss. Solusi yang eksak dari metode langsung tergantung pada pembulatan yang mana menyebabkan metode ini menjadi kurang efisien jika dibandingkan dengan metode iterasi yang akan menggunakan nilai toleransi yang akan ditentukan sebelumnya sebagai salah satu parameter input operasi sehingga proses untuk memperoleh solusi berupa iterasi langkah akan meningkatkan akurasi dari solusi yang didapatkan setelah diperoleh konvergensi dari seluruh proses komputasi yang berlangsung. Selain itu, metode iterasi juga membutuhkan ruang penyimpanan yang lebih kecil dibandingkan dengan metode iterasi ketika koefisien matriks dari sistem bersifat *sparse* (Saad, 2003).

Matriks yang berkaitan dengan sistem linier juga digolongkan dalam *dense* atau *sparse*. Matriks *dense* mempunyai sedikit sekali unsur-unsur nol, dan orde matriks itu cenderung

menjadi relatif kecil, mungkin berorde 100 atau lebih kecil. Matriks *sparse* mempunyai sedikit sekali unsur-unsur tak nol. Biasanya timbul dari usaha untuk menyelesaikan persamaan diferensial dengan metode beda hingga. Orde matriks semacam ini mungkin besar sekali, dan secara ideal sangat cocok untuk penyelesaian dengan metode iterasi.

Bentuk sistem linier *sparse* dapat diperoleh dari konsep dasar metode beda hingga untuk penyelesaian sistem persamaan diferensial yang mempertimbangkan persamaan diferensial biasa orde dua. Selanjutnya untuk mencari solusi dari sistem linier *sparse* tersebut dapat digunakan tiga metode iterasi yaitu metode iterasi Jacobi, Gauss-Seidel dan *Successive Over Relaxation* (Leveque, 2007).

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui metode iterasi terbaik diantara ketiga metode iterasi tersebut berdasarkan laju konvergensi. Penelitian ini diharapkan dapat bermanfaat sebagai referensi baru bagi peminat ilmu terapan, khususnya dalam menentukan solusi sistem linier ketika matriksnya berukuran sangat besar.

LANDASAN TEORI

Metode Beda Hingga (*Finite Difference Method*)

Metode ini digunakan untuk memecahkan persamaan diferensial biasa secara numerik, dengan menggunakan deret Taylor yang diputus pada orde tertentu sesuai kebutuhan yang ada. Sebagai contoh uraian deret Taylor adalah :

$$\left. \begin{aligned} f(x + \Delta x) &= f(x) + \frac{\Delta x}{1!} f'(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x) + \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x) + \dots \\ f(x - \Delta x) &= f(x) - \frac{\Delta x}{1!} f'(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x) - \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x) + \dots \end{aligned} \right\}$$

Pendekatan dari $\frac{\partial f}{\partial x}$ dapat ditulis sebagai :

Beda maju (*forward difference*)

$$f'(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Beda mundur (*Backward difference*)

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x}$$

Beda pusat (*centre difference*)

$$f'(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x}$$

Bila diferensialnya sampai orde 2 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, maka uraian deret Taylor sampai orde 2 kemudian dijumlahkan :

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) &= f(x) + \frac{\Delta x}{1!} f'(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x) \\ f(x - \Delta x) &= f(x) - \frac{\Delta x}{1!} f'(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x) \\ \hline f(x + \Delta x) + f(x - \Delta x) &= 2f(x) + \Delta x^2 f''(x) \end{aligned} +$$

atau

$$f'' = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2}$$

METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan adalah studi literatur atau kajian pustaka dari beberapa buku dan jurnal mengenai teori-teori yang mendukung penyelesaian penelitian ini serta analisa hasil penelitian berupa simulasi numerik menggunakan program komputer (*Software Matlab*).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini dibahas bentuk sistem linear *sparse* dan solusinya menggunakan metode iterasi Jacobi, Gauss-Seidel dan *Successive Over Relaxation* (SOR) didasarkan pada metode *splitting* matriks. Sistem linier ini muncul dari konsep dasar metode beda hingga yang mempertimbangkan persamaan diferensial biasa orde dua.

Sistem Persamaan Linier Sparse

Berikut ini merupakan konsep dasar metode beda hingga yang digunakan untuk memperoleh bentuk sistem linear *sparse*. Dalam penelitian ini, dari metode beda hingga untuk penyelesaian persamaan diferensial, dipertimbangkan persamaan diferensial biasa tingkat dua,

$$u''(x) = f(x), \quad a < x < b$$

dengan syarat batas

$$u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta$$

Fungsi $f(x)$ ditentukan dan selanjutnya akan menghitung $u(x)$ pada interval $a < x < b$.

Dengan metode beda hingga, akan ditentukan grid fungsi dari nilai $u_0, u_1, \dots, u_m, u_{m+1}$ dengan u_i merupakan aproksimasi untuk solusi $u(x_i)$.

Di sini $x_i = ih$ dan $h = \frac{b-a}{m+1}$ merupakan jarak diantara grid point. Dari syarat batas

diperoleh $u_0 = \alpha$ dan $u_{m+1} = \beta$ dan juga terdapat m nilai yang tak diketahui yakni u_1, u_2, \dots, u_m yang harus dihitung.

Jika diganti $u''(x)$ dengan aproksimasi beda pusat

$$D^2 u_i = \frac{1}{h^2} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1})$$

maka diperoleh persamaan aljabar

$$f(x_i) = \frac{1}{h^2} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}), \quad \text{untuk } i = 1, 2, \dots, m$$

$$i = 1 \Rightarrow f(x_1) = \frac{1}{h^2} (u_0 - 2u_1 + u_2) = \frac{1}{h^2} (\alpha - 2u_1 + u_2)$$

$$i = 2 \Rightarrow f(x_2) = \frac{1}{h^2}(u_1 - 2u_2 + u_3)$$

$$i = 3 \Rightarrow f(x_3) = \frac{1}{h^2}(u_2 - 2u_3 + u_4)$$

⋮
⋮
⋮

$$i = m \Rightarrow f(x_m) = \frac{1}{h^2}(u_{m-1} - 2u_m + u_{m+1}) = \frac{1}{h^2}(u_{m-1} - 2u_m + \beta)$$

Sistem linier dari m persamaan di atas dapat ditulis dalam bentuk:

$$\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{m-1} \\ u_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1) - \frac{\alpha}{h^2} \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_{m-1}) \\ f(x_m) - \frac{\beta}{h^2} \end{bmatrix}$$

Jika

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{m-1} \\ u_m \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad f = \begin{bmatrix} f(x_1) - \frac{\alpha}{h^2} \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_{m-1}) \\ f(x_m) - \frac{\beta}{h^2} \end{bmatrix}$$

maka diperoleh bentuk umum sistem linier sparse $Au = f$

ANALISIS *SPLITTING* MATRIKS

Pada bagian ini akan dikaji konvergensi dari metode Jacobi, Gauss–Seidel dan SOR dengan mempertimbangkan analog masalah Poisson satu-dimensi $u''(x) = f(x)$ sehingga diperoleh sistem persamaan tridiagonal untuk dipecahkan.

Metode Jacobi

Metode Jacobi untuk masalah ini mengambil bentuk

$$\text{Jacobi} \quad u_i^{[k+1]} = \frac{1}{2} \left(u_{i-1}^{[k]} + u_{i+1}^{[k]} - h^2 f_i \right) \tag{1}$$

metode tersebut, dapat dianalisis berdasarkan *splitting* dari matriks A

$$A = M - N$$

dimana M dan N adalah dua matriks $m \times m$. Maka sistem $Au = f$ dapat ditulis $Mu = Nu + f$. Dengan metode iteratif

$$Mu^{[k+1]} = Nu^{[k]} + f \tag{2}$$

Di setiap iterasi diasumsikan $u^{[k]}$ diketahui dan memperoleh $u^{[k+1]}$ dengan menyelesaikan sistem linear dengan matriks M . Ide dasarnya adalah untuk menentukan *splitting* sehingga M berisi sebanyak mungkin A (dalam beberapa pengertian) sekaligus menjaga struktur yang sederhana bahwa sistem (2) jauh lebih mudah untuk diselesaikan daripada sistem yang asli dengan A lengkap. Ketika sistem yang melibatkan matriks diagonal, matriks segitiga bawah, dan matriks segitiga atas relatif sederhana untuk memecahkan, ada beberapa pilihan yang jelas untuk matriks M . Untuk membahas ini dalam kerangka kesatuan, tulis

$$A = D - L - U$$

pada umumnya, di mana D adalah diagonal dari A , $-L$ adalah bagian segitiga bawah, dan $-U$ adalah bagian segitiga atas. Sebagai contoh, matriks tridiagonal akan memberikan

$$D = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad L = -\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dengan $-U = -L^T$ menjadi sisa A .

Dalam metode Jacobi, hanya akan diambil M sebagai bagian diagonal dari A , $M = D$, sehingga

$$M = -\frac{2}{h^2} I, \quad N = L + U = D - A = -\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sistem persamaan (2) menjadi diagonal dan proses penyelesaiannya yakni sebagai berikut:

$$\begin{aligned} u^{[k+1]} &= M^{-1} N u^{[k]} + M^{-1} f \\ &= \left(-\frac{h^2}{2} I \right) \left(-\frac{1}{h^2} \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} u^{[k]} + \left(-\frac{h^2}{2} I \right) f \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} u^{[k]} - \frac{h^2}{2} f \quad (3)$$

yang sesuai dengan (1) Jacobi : $u_i^{[k+1]} = \frac{1}{2}(u_{i-1}^{[k]} + u_{i+1}^{[k]} - h^2 f_i)$

Metode Gauss - Seidel

Gauss-Seidel untuk masalah ini mengambil bentuk

$$\text{Gauss-Seidel} : u_i^{[k+1]} = \frac{1}{2}(u_{i-1}^{[k+1]} + u_{i+1}^{[k]} - h^2 f_i) \quad (4)$$

metode tersebut dianalisis berdasarkan *splitting* dari matriks A , yakni $A = M - N$. Untuk membahas ini dalam kerangka kesatuan, tulis $A = D - L - U$. Dalam Gauss-Seidel, akan diambil M menjadi bagian penuh segitiga bawah A , sehingga $M = D - L$ dan $N = U$. Sistem (2) diselesaikan dengan menggunakan substitusi maju, yang menghasilkan (4). Untuk menganalisis metode ini, dimulai dari persamaan (2) dengan update rumus :

$$u^{[k+1]} = M^{-1}Nu^{[k]} + M^{-1}f = Gu^{[k]} + c$$

dimana $G = M^{-1}N$ adalah matriks iterasi dan $c = M^{-1}f$

$$M = (D - L) = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow M^{-1} = -h^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2^{m-1}} & \cdots & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2^m} & \cdots & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$M^{-1}N = M^{-1}U = -h^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2^{m-1}} & \cdots & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2^m} & \cdots & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \left(-\frac{1}{h^2} \right) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^{m-1}} & \cdots & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2^m} & \cdots & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Sehingga

$$u^{[k+1]} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & & & & \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & & & \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & & \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \frac{1}{2^{m-1}} & \cdots & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2^m} & \cdots & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} u^{[k]} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & & & & \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & & & & \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \frac{1}{2^{m-1}} & \cdots & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \\ \frac{1}{2^m} & \cdots & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} h^2 f \quad (5)$$

Untuk membuktikan bahwa persamaan di atas sesuai dengan bentuk Gauss- Seidel:

$$u_i^{[k+1]} = \frac{1}{2} (u_{i-1}^{[k+1]} + u_{i+1}^{[k]} - h^2 f_i)$$

maka dengan menggunakan substitusi maju dapat dijabarkan bentuk Gauss – Seidel tersebut sebagai berikut.

$$u_i^{[k+1]} = \frac{1}{2} (u_{i-1}^{[k+1]} + u_{i+1}^{[k]} - h^2 f_i)$$

$$\begin{aligned} u_{i+1}^{[k+1]} &= \frac{1}{2} (u_i^{[k+1]} + u_{i+2}^{[k]} - h^2 f_{i+1}) \\ &= \frac{1}{4} u_{i-1}^{[k+1]} + \frac{1}{4} u_{i+1}^{[k]} + \frac{1}{2} u_{i+2}^{[k]} - \frac{1}{4} h^2 f_i - \frac{1}{2} h^2 f_{i+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{i+2}^{[k+1]} &= \frac{1}{2} (u_{i+1}^{[k+1]} + u_{i+3}^{[k]} - h^2 f_{i+2}) \\ &= \frac{1}{8} u_{i-1}^{[k+1]} + \frac{1}{8} u_{i+1}^{[k]} + \frac{1}{4} u_{i+2}^{[k]} + \frac{1}{2} u_{i+3}^{[k]} - \frac{1}{8} h^2 f_i - \frac{1}{4} h^2 f_{i+1} - \frac{1}{2} f_{i+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{i+3}^{[k+1]} &= \frac{1}{2} (u_{i+2}^{[k+1]} + u_{i+4}^{[k]} - h^2 f_{i+3}) \\ &= \frac{1}{16} u_{i-1}^{[k+1]} + \frac{1}{16} u_{i+1}^{[k]} + \frac{1}{8} u_{i+2}^{[k]} + \frac{1}{4} u_{i+3}^{[k]} + \frac{1}{2} u_{i+4}^{[k]} - \frac{1}{16} h^2 f_i - \frac{1}{8} h^2 f_{i+1} - \frac{1}{4} f_{i+2} - \frac{1}{2} f_{i+3} \end{aligned}$$

dan seterusnya.

Selanjutnya sistem linier dari persamaan di atas dapat ditulis dalam bentuk:

$$u^{[k+1]} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & & & & \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & & & \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & & \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \frac{1}{2^{m-1}} & \cdots & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2^m} & \cdots & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} u^{[k]} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & & & & \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & & & & \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \frac{1}{2^{m-1}} & \cdots & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \\ \frac{1}{2^m} & \cdots & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} h^2 f$$

yang sesuai dengan dengan bentuk persamaan (5).

Metode Successive Over Relaxation (SOR)

Pada metode SOR digunakan dua-tahap update yang diilustrasikan untuk permasalahan persamaan diferensial biasa orde dua $u'' = f(x)$:

$$\left. \begin{aligned} u_i^{GS} &= \frac{1}{2} (u_{i-1}^{[k+1]} + u_{i+1}^{[k]} - h^2 f_i) \\ u_i^{[k+1]} &= u_i^{[k]} + \omega (u_i^{GS} - u_i^{[k]}) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

dengan ω adalah parameter skalar. Jika $\omega = 1$ maka $u_i^{[k+1]} = u_i^{GS}$ yakni update dari *Gauss-Seidel*. Jika $0 < \omega < 1$, maka disebut metode *under relaxatin*, dimana metode ini berguna agar sistem persamaan linear bisa mencapai kondisi konvergen walaupun sistem tersebut sulit mencapai kondisi konvergen dengan metode *Gauss-Seidel*. Jika $\omega > 1$, maka kita bergerak lebih jauh dari dugaan *Gauss-Seidel*. Dalam hal ini metode ini dikenal sebagai metode *Successive Over Relaxation* (SOR) yang mana metode ini berguna untuk mengakselerasi atau mempercepat kondisi konvergen dibandingkan dengan *Gauss-Seidel* (Suparno, 2008). Metode SOR ini juga sangat berguna untuk menyelesaikan sistem persamaan linear yang muncul dari persamaan diferensial-parsial tertentu. Rumus dalam (6) dapat dikombinasikan untuk menghasilkan

$$u_i^{[k+1]} = \frac{\omega}{2} (u_{i-1}^{[k+1]} + u_{i+1}^{[k]} - h^2 f_i) + (1 - \omega) u_i^{[k]} \quad (7)$$

Untuk sistem umum $Au = f$ dengan $A = D - L - U$ metode SOR mengambil *splitting* matriks dengan

$$M = \frac{1}{\omega} (D - \omega L), \quad N = \frac{1}{\omega} ((1 - \omega)D + \omega U)$$

berdasarkan teorema *Ostrowski* menyatakan bahwa jika A adalah *Symmetric Positive Definite* dan $D - \omega L$ *nonsingular*, maka metode SOR konvergen untuk setiap $0 < \omega < 2$ (Leveque, 2007).

SIMULASI NUMERIK

Berikut ini akan ditampilkan perbandingan metode iterasi Jacobi, Gauss-Seidel dan SOR dalam menyelesaikan sistem linear *sparse* untuk beberapa fungsi $u''(x) = f(x)$ pada interval tertentu.

Sebagai contoh pertama dari metode beda hingga untuk penyelesaian persamaan diferensial tingkat dua,

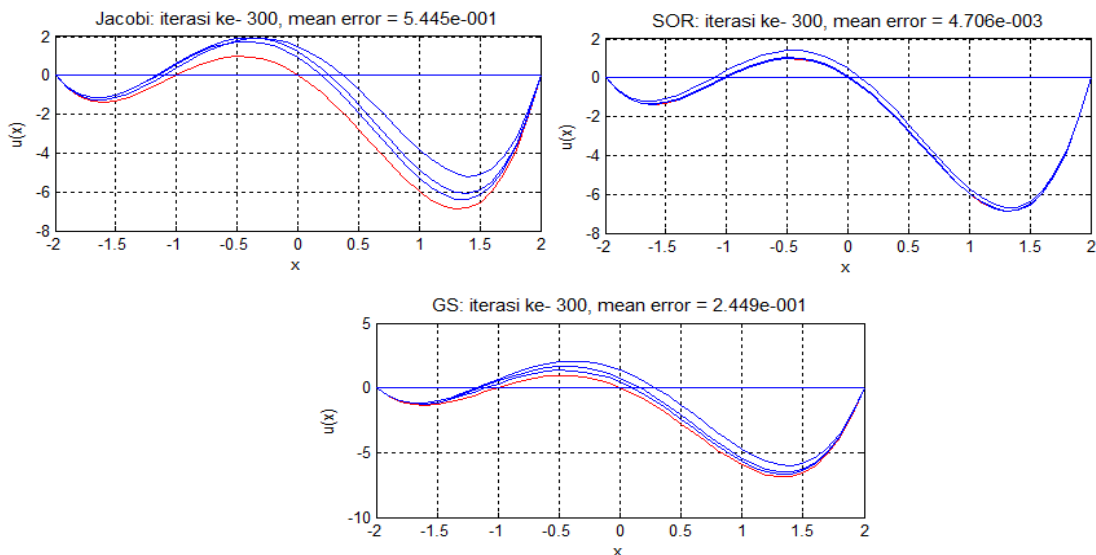
$$u''(x) = 12x^2 + 6x - 8, \quad -2 < x < 2$$

dengan syarat batas

$$u(-2) = 0, \quad u(2) = 0$$

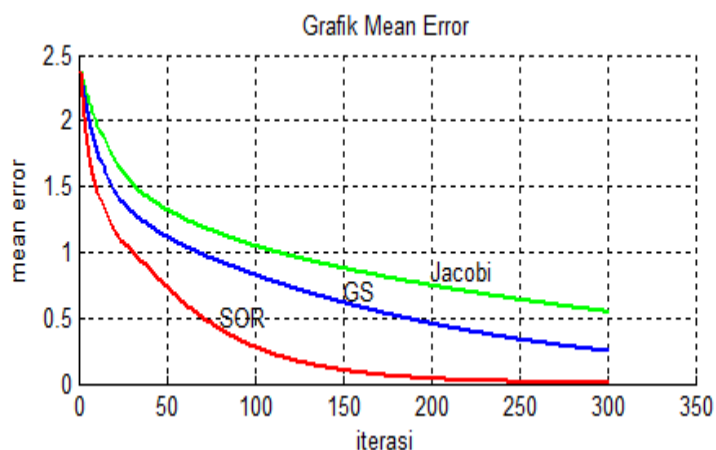
Selanjutnya akan ditentukan grid fungsi dari nilai u_1, u_2, \dots, u_{39} dengan u_i merupakan solusi pendekatan untuk $u(x_i)$.

Berikut merupakan hasil simulasi yang menampilkan grafik solusi sistem linier *sparse* untuk contoh kasus pertama. Jarak diantara grid point adalah $h = \frac{2 - (-2)}{39 + 1} = \frac{4}{40} = 0,1$ sehingga $x_i = -2 + 0,1i$ untuk $i = 1, 2, \dots, 39$.



Gambar 1. Grafik solusi sistem linier *sparse* menggunakan metode iterasi untuk kasus 1.

Pada Gambar 1 di atas, garis merah merupakan solusi eksak dari persamaan diferensial yang diberikan sedangkan garis biru menunjukkan solusi pendekatan yang diplot untuk setiap 100 iterasi.



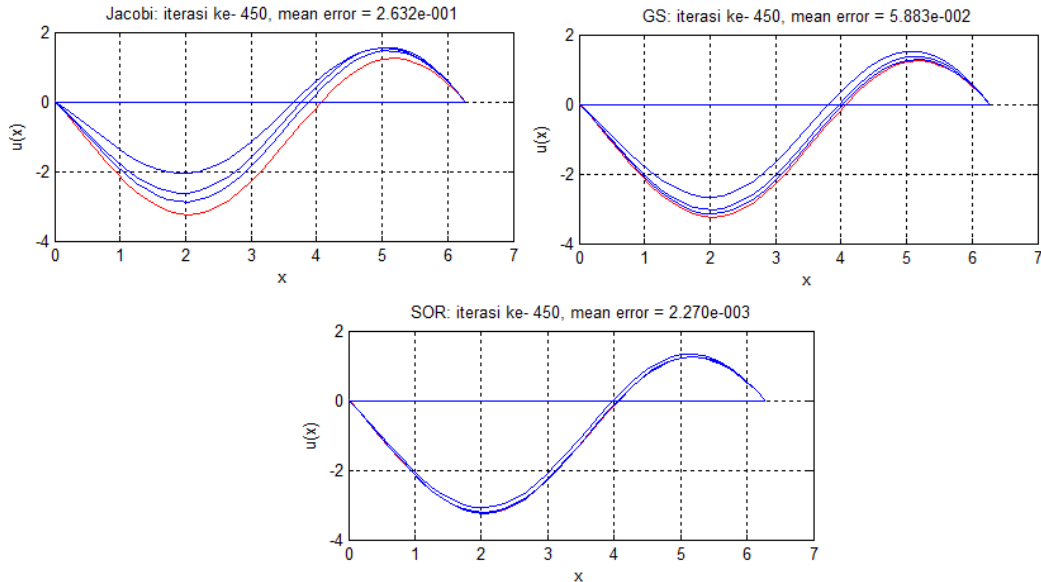
Gambar 2. Grafik perbandingan mean error antara solusi eksak dan solusi pendekatan untuk kasus 1.

Dari grafik mean error terlihat bahwa pada sekitar iterasi ke 245, error antara nilai pendekatan dan nilai eksak untuk metode SOR sudah konvergen ke nol namun untuk metode Jacobi dan Gauss-Seidel belum konvergen ke nol.

Sebagai contoh kedua dari metode beda hingga untuk penyelesaian persamaan diferensial, dipertimbangkan persamaan diferensial biasa tingkat dua,

$$u''(x) = 2 \sin x - \cos x, \quad 0 < x < 2\pi$$

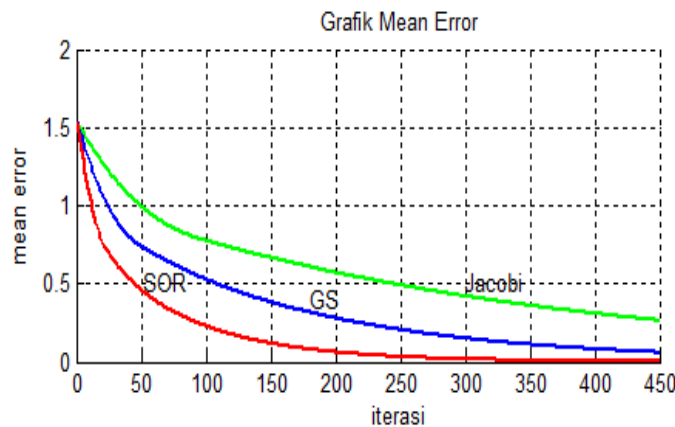
dengan syarat batas $u(0) = 0, u(2\pi) = 0$. Selanjutnya akan ditentukan grid fungsi dari nilai u_1, u_2, \dots, u_{39} dengan u_i merupakan solusi pendekatan untuk $u(x_i)$. Berikut merupakan hasil simulasi yang menampilkan grafik solusi sistem linier *sparse* untuk contoh kasus kedua.



Gambar 3. Grafik solusi sistem linier *sparse* menggunakan metode iterasi untuk kasus 2

Jarak diantara grid point adalah $h = \frac{2\pi}{39+1} = \frac{2\pi}{40} = 0,05\pi = 0,1571$ sehingga $x_i = 0,05\pi i$

untuk $i = 1, 2, \dots, 39$. Solusi pendekatan (garis biru) pada Gambar 3 di atas diplot untuk setiap 150 iterasi dengan iterasi maksimum yang diambil adalah 450. Selanjunya untuk mengetahui metode iterasi terbaik maka pada Gambar 4 berikut ditampilkan grafik mean erornya antara solusi eksak dengan solusi pendekatan untuk ketiga metode iterasi yang digunakan.



Gambar 4. Grafik perbandingan mean error antara solusi eksak dan solusi pendekatan untuk kasus 2

Pada grafik mean error terlihat bahwa pada iterasi ke 325, error antara nilai pendekatan dan nilai eksak untuk metode SOR sudah konvergen ke nol namun untuk metode Jacobi dan Gauss-Seidel pada iterasi ke 450 pun belum konvergen ke nol.

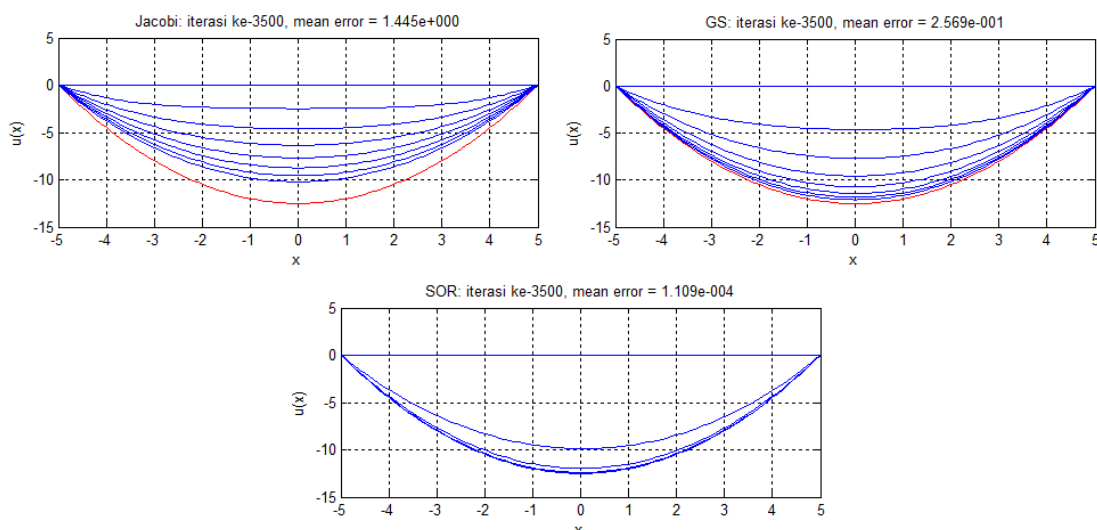
Sebagai contoh ketiga dari metode beda hingga untuk penyelesaian persamaan diferensial, dipertimbangkan persamaan diferensial biasa tingkat dua,

$$u''(x) = 1, \quad -5 < x < 5$$

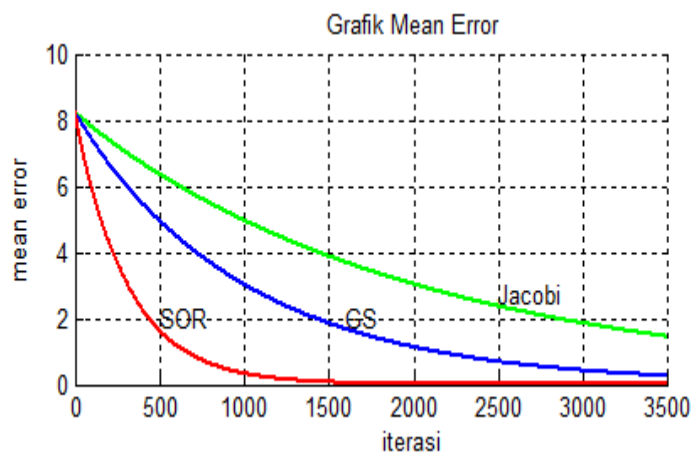
dengan syarat batas $u(-5) = 0$, $u(5) = 0$. Selanjutnya akan ditentukan grid fungsi dari nilai u_1, u_2, \dots, u_{99} dengan u_i merupakan solusi pendekatan untuk $u(x_i)$.

Jarak diantara grid point adalah $h = \frac{5 - (-5)}{99 + 1} = \frac{10}{100} = 0,1$ sehingga $x_i = -5 + 0,1i$ untuk untuk $i = 1, 2, \dots, 99$.

Berikut merupakan hasil simulasi yang menampilkan grafik solusi sistem linier *sparse* untuk kasus 3 beserta grafik mean erornya.



Gambar 5. Grafik solusi sistem linier *sparse* menggunakan metode iterasi untuk kasus 3



Gambar 6. Grafik perbandingan mean error antara solusi eksak dan solusi pendekatan untuk kasus 3

Pada grafik mean error terlihat bahwa pada iterasi ke 1650, error antara nilai pendekatan dan nilai eksak untuk metode SOR sudah konvergen ke nol namun untuk metode Jacobi dan Gauss-Seidel hingga pada iterasi ke 3500 pun belum konvergen ke nol.

Berdasarkan ketiga contoh kasus yang telah dibahas menunjukkan bahwa metode SOR mempunyai laju konvergensi yang lebih cepat dari pada metode Jacobi dan Gauss-Seidel.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil simulasi penyelesaian sistem linier *sparse* maka disimpulkan bahwa metode SOR merupakan metode iterasi terbaik karena memiliki laju konvergensi yang jauh lebih cepat dari pada metode Jacobi dan Gauss-Seidel.

DAFTAR PUSTAKA

- Leveque, R. J. (2007). *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations, Steady-State and Time-Dependent Problems*. Washington Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Nugroho, S. (2008). Penyelesaian Sistem Persamaan Linier dengan Metode Iterasi.
- Saad, Y. (2003) . *Iterative Methods for Sparse Linear Systems, Second Edition*. The Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Suparno, S. (2008). Komputasi untuk Sains dan Teknik, Edisi 3. Departemen Fisika-FMIPA UI.