Prosiding

SEMINAR NASIONAL *BASIC SCIENCE VI*

Sains Membangun Karakter dan Berpikir Kritis
Untuk Kesejahteraan Masyarakat

Ambon, 07 Mei 2014

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS PATTIMURA
AMBON

Cetakan I,   Agustus 2014

Diterbitkan oleh: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Pattimura

ISBN: 978-602-97552-1-2

Deskripsi halaman sampul : Gambar yang ada pada cover adalah kumpulan benda-benda langit dengan berbagai fenomena

KARAKTERISTIK ELEMEN-ELEMEN DIAGONAL UTAMA PADA MATRIKS ATAS DIU YANG TERDIAGONALISASI

E. R. Persulessy

Staf Dosen Jurusan Matematika, Fakultas Matematikan dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Pattimura

ABSTRAK

Matriks yg dapat didiagonalkan memberikan kontribusi yang signifikan dalam proses perhitungan yg melibatkannya. Proses diagonalisasi suatu matriks sangat ditentukan oleh lapangan asal elemen-elemen yang menyusun matriks tersebut.

Penelitian ini bertujuan untuk memperkenalkan langkah-langkah diagonalisasi suatu matriks yang elemen-elemennya berasal dari suatu Daerah Ideal Utama (DIU) dan karakteristik elemen di diagonal utama matriks hasil proses diagonalisasi tersebut.

Metode yang digunakan dalam peneltian ini adalah metode studi pustaka yang melibatkan proses analisis tentang teori dasar matriks dan ring, terutama DIU, serta operasi-operasi yang berlaku pada matriks, untuk membuktikan suatu teorema yang akan menyajikan langkah-langkah diagonalisasi matriks yang dimaksud.

Teorema diagonalisasi tersebut memberikan jaminan ekuivalensi antara matriks berukuran $s \times t$ atas DIU dengan matriks $\text{diag}(d_1, d_2, ..., d_u)$ dengan $u = \min\{s, t\}$ dan $d_1 \mid d_2 \mid ... \mid d_u$.

Kata kunci: DIU, matriks diagonal, matriks elementer, unit.

PENDAHULUAN

Proses diagonalisasi suatu matriks adalah proses yang melibatkan Operasi Baris Elementer (OBE) utk mengenolkan semua elemen matriks tersebut kecuali elemen di diagonal utama. Umumnya elemen suatu matriks berasal dari lapangan yang berbeda. Setiap lapangan memiliki ciri khas yang mempengaruhi proses diagonalisasi matriks.

Salah satu lapangan yang telah dikenal adalah Daerah Ideal Utama (DIU). Proses diagonalisasi matriks atas DIU melibatkan matriks A dan B yg berukuran sama dan memenuhi $B = XAY$, dengan X dan Y masing-masing adalah matriks invertibel.

Teori dasar tentang ring, terutama DIU, sangat diperlukan karena elemen matriks dalam penelitian ini adalah anggota DIU (Fraleigh, 1980). Dasar-dasar pembuktian teorema diagonalisasi atas daerah Euclid dipergunakan sebagai pedoman untuk membuktikan berlakunya teorema tersebut atas DIU (Hartley&Hawkes, 1974).

Penelitian ini bertujuan untuk memberikan metode yang sistematis untuk mendiagonalkan suatu matriks atas DIU dan memperkenalkan karakteristik matriks diagonal yang merupakan hasil proses diagonalisasi tersebut. Metode yang dihasilkan dari penelitian ini dapat dijadikan sebagai pedoman tambahan untuk menemukan metode-metode diagonalisasi matriks atas lapangan yang lain.

DASAR TEORI

Definisi 2.1. Sebuah matriks $n \times n$ disebut matriks elementer jika matriks tersebut dapat diperoleh dari matriks satuan I_n dengan melakukan sebuah operasi baris elementer tunggal, (Anton, 1991).

Definisi 2.2. Jika *X* matriks bujursangkar dan dapat ditemukan matriks *Y* sehingga $XY = YX = I$, maka *X* dikatakan invertibel dan *Y* disebut invers *X*, (Anton, 1991).

Definisi 2.3. Diketahui *A* dan *B* dua matriks berukuran sama atas ring R. Matriks *B* ekuivalen dengan *A* atas *R* jika dan hanya jika terdapat matriks invertibel *X* dan *Y* sehingga $B = XAY$, (Anton, 1991).

Definisi 2.4. Jika *R* ring komutatif dengan elemen satuan 1, *a* elemen *R* disebut unit jika ada $b \in R$ sehingga $ab = 1$.

Definisi 2.5. Misalkan $A \in R^{sxt}$. A disebut matriks diagonal jika $a_{ij} = 0$, untuk $i \neq j$.

Lemma 2.6.

Efek pergandaan awal (pre-multiplying) pada matriks :

(i). B_{ij}, menukar baris ke-*i* dengan baris ke-*j*

(ii). $B_i(w)$, menggandakan baris ke-*i* dengan *w*

(iii). $B_{ij}(r)$, menambahkan *r* kali baris ke-*j* ke baris ke-*i*,

disebut operasi elementer baris.

Efek pergandaan akhir (post-mutiplying) pada matriks :

(i). K_{ij}, menukar kolom ke-*i* dengan baris ke-*j*

(ii). $K_i(w)$, menggandakan kolom ke-*i* dengan *w*

(iii). $K_{ij}(r)$, menambahkan *r* kali kolom ke-*j* ke kolom ke-*i*,

disebut operasi elementer kolom.

Definisi 2.7. Suatu Daerah Integral (DI) *R* disebut DIU, jika untuk setiap ideal *A* dalam ring *R*, ada $a_0 \in A$ dengan sifat $A = \langle a_0 \rangle = \langle ra_0 | r \in R \rangle$.

Teorema 2.8. Jika $a, b \in R$ DI dengan $a | b$ dan $b | a$ maka ada unit $u \in R$ sehingga $a = ub$.

Definisi 2.9. Misalkan *R* DIU. Suatu $d \in R$ disebut elemen prima, jika $d \neq 0$ dan *d* bukan unit maka untuk setiap $a, b \in R$, jika $d | ab$ maka $d | a$ atau $d | b$.

Definisi 2.10. Misalkan *R* DIU. Suatu $d \in R$ disebut elemen irredusibel, jika

(i). $d \neq 0$,

(ii). *d* bukan unit,

(iii). untuk setiap $a, b \in R$, jika $d = ab$ maka *a* atau *b* unit.

Teorema 2.11. Jika $a,b \in R$ DI maka pernyataan berikut ekuivalen :

a). $a \mid b$ dan $b \mid a$,

b). $Ra = Rb$,

c). Ada unit $u \in R$ sehingga $b = ua$

Definisi 2.12. Suatu R DI disebut daerah faktorisasi tunggal (DFT), jika:

1. Setiap elemen di R yang bukan nol dan bukan unit dapat disajikan sebagai hasil ganda elemen irredusibel sebanyak berhingga
2. Jika $a = p_1 p_2 \cdots p_n$ dan $b = q_1 q_2 \cdots q_n$ dengan $p_1, p_2, \cdots, p_n, q_1, q_2, \cdots, q_n$ elemen irredusibel maka $m = n$ dan setelah penukaran indeks p_i dan q_i bersekawan.

Teorema 2.13. Setiap DIU adalah DFT.

Teorema 2.14. Jika $a,b \in R$ DIU maka a dan b memiliki pembagi persekutuan terbesar d dan $d = ra + sb$, untuk suatu $r, s \in R$.

Sifat 2.15

Misalkan G, Im, H, J adalah matriks-matriks bujursangkar atas ring R yang masing-masing berukuran $m \times m, m \times m, n \times n$ dan $p \times p$. Selanjutnya, K dan L adalah matriks berukuran $q \times n$ dan $p \times n$ atas R, (Brown, 1992).

Jika

$$H^1 = \left[\begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ \hline 0 & H \end{array}\right]_{(m+n)\times(m+n)} ;\ J^1 = \left[\begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ \hline 0 & J \end{array}\right]_{(m+p)\times(m+p)} ;\ K^1 = \left[\begin{array}{c|c} G & 0 \\ \hline 0 & K \end{array}\right]_{(m+q)\times(m+n)}$$

$$L^1 = \left[\begin{array}{c|c} G & 0 \\ \hline 0 & L \end{array}\right]_{(m+p)\times(m+n)}$$

maka

a). *Fakta 1*

$$K^1 H^1 = \left[\begin{array}{c|c} G & 0 \\ \hline 0 & KH \end{array}\right]_{(m+q)\times(m+n)}$$

$$J^1 L^1 = \left[\begin{array}{c|c} G & 0 \\ \hline 0 & JL \end{array}\right]_{(m+p)\times(m+n)}$$

b). *Fakta 2*

Jika H dan J matriks invertibel maka H^1 dan J^1 matriks invertibel.

c). *Fakta 3*

Jika $p = q$ maka $J^1 K^1 H^1 = \left[\begin{array}{c|c} G & 0 \\ \hline 0 & JKH \end{array}\right]_{(m+p)\times(m+n)}$.

d). *Fakta 4*

Jika $K \sim X$ dengan *X* suatu matriks maka $K^1 \sim X^1$ dengan $X^1 = \left[\begin{array}{c|c} G & 0 \\ \hline 0 & X \end{array}\right]$.

e). *Fakta 5*

Jika $n = p$ maka $H^1 J^1 = \left[\begin{array}{c|c} G & 0 \\ \hline 0 & HJ \end{array}\right]_{(m+n)\times(m+p)}$.

f). Jika *H* dan *J* matriks invertibel maka H^1J^1 matriks invertibel.

HASIL PENELITIAN

Misalkan *R* adalah DIU. Akibatnya untuk setiap $r \in R \setminus \{0\}$ berlaku $r = wp_1 p_2 \cdots p_n$, dengan w unit, p_i prima anggota *R*, *n* bilangan bulat positif dan mungkin $p_i = p_j$ untu suatu $i \neq j$, ($1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$) karena berlaku Teorema Faktorisasi Tunggal.

Dibentuk fungsi $\Phi : R \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ dengan aturan perkawanan

$$(\forall r \in R)\ \Phi(r) = n = \text{ jumlah elemen prima yang menyusun } r.$$

Akibatnya

$$\Phi(rr^*) = \Phi(r) + \Phi(r^*)$$

untuk setiap $r, r^* \in R \setminus \{0\}$.

Diketahui $A = [a_{kl}]$ matriks berukuran $s \times t$ dengan $a_{kl} \in R$ DIU. Akan ditentukan matriks $C \sim A$ atas *R*, dengan

$$C = \left[\begin{array}{c|ccc} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & C^* & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

serta d_1 membagi habis semua elemen matriks C^*.

Pada proses ini terdapat tiga kasus yang mungkin terjadi, yaitu

1). $a_{11} \mid a_{1j}$ dan $a_{11} \mid a_{i1}$,

2). $(\exists a_{1j})\ a_{11} \nmid a_{1j}$,

3). $(\exists a_{i1})\ a_{11} \nmid a_{i1}$.

Proses I

Jika *A* bukan matriks nol maka dengan serangkaian operasi baris elementer dapat diasumsikan $a_{11} \neq 0$.

Kasus 1

Karena $a_{11}\,\big|\,a_{ij}$ dan $a_{11}\,\big|\,a_{i1}$, maka $a_{1j}=q_j a_{11}$ dan $a_{i1}=p_i a_{11}$, untuk suatu $p_i, q_j \in R$ ($1\le i\le s$, $1\le j\le t$). Dengan operasi elementer kolom $K_{j1}\left(-q_j\right)$ dan baris $B_{i1}\left(-p_i\right)$ pada A diperoleh matriks $D \sim A$, dengan

$$D=\left[\begin{array}{c|ccc} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & D^* & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

Jika a_{11} membagi habis elemen D^* maka diperoleh matriks C. Jika tidak berarti $\left(\exists d_{ij}\in D^*\right)\, a_{11} \nmid d_{ij}$. Dengan operasi baris $B_{1i}\left(1\right)$ pada D, diperoleh matriks $D'=\left[d_{kl}^{'}\right]$ dengan $d_{11}^{'}=a_{11}$ dan $\left(\exists d_{1j}^{'}\in D'\right)\, d_{11}^{'} \nmid d_{1j}^{'}$. Diperoleh kasus 2.

Kasus 2

Karena $\left(\exists a_{1j}\in A\right) a_{11} \nmid a_{1j}$, maka ada $d\in R$ dengan $d=\text{fpb}\left\{a_{11}, a_{1j}\right\}$, $d\neq 0$ dan $Ra_{11}+Ra_{1j}=Rd$. Sehingga $\left(\exists\, y_1, y_j\in R\right) a_{11}=dy_1$ dan $a_{1j}=dy_j$ dengan $\Phi\left(d\right)\le\Phi\left(a_{11}\right)$. Jika $\Phi\left(d\right)=\Phi\left(a_{11}\right)$ maka $\Phi\left(y_1\right)=0$, berarti y_1 unit. Jadi $d \sim a_{11}$. Sehingga $a_{11}\,|\,a_{1j}$ kontradiksi. Jadi berlaku $\Phi\left(d\right)<\Phi\left(a_{11}\right)$. Kemudian $\left(\exists x_1, x_j\in R\right)\, d=x_1 a_{11}+x_j a_{1j}$, akibatnya

$$d=x_1\left(dy_1\right)+x_j\left(dy_j\right)=d\left(x_1 y_1+d_j y_j\right)$$

Jadi, $x_1 y_1+d_j y_j=1$.

Selanjutnya, dibentuk matriks S yang berukuran $t\times t$, dengan

$$S=\left[\begin{array}{c|c|c|c} x_1 & 0 & -y_j & 0 \\ \hline 0 & I_{j-2} & 0 & 0 \\ \hline x_j & 0 & y_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{t-j} \end{array}\right]$$

dan $\det\left(S\right)=\det\left(B\right)$, $\det\left(I_{t-j}\right)=\det\left(I_{j-2}\right)=1$.

Matriks

$$B=\left[\begin{array}{c|c|c} x_1 & 0 & -y_1 \\ \hline 0 & I_{j-2} & 0 \\ \hline x_j & 0 & y_1 \end{array}\right]$$

adalah matriks berukuran $j\times j$.

Karena,

$$
\begin{aligned}
\det(B) &= x_1 \left[\begin{array}{c|c} I_{j-2} & 0 \\ \hline 0 & y_1 \end{array}\right] + (-1)^{j+1}\left(-y_j\right)\left[\begin{array}{c|c} 0 & I_{j-2} \\ \hline x_j & 0 \end{array}\right] \\
&= x_1 \left| I_{j-2} \right| y_1 + (-1)^{j+1}\left(-y_j\right)(-1)^{j-2}\left[\begin{array}{c|c} I_{j-2} & 0 \\ \hline 0 & x_j \end{array}\right] \\
&= x_1 y_1 + (-1)^{j+1+1+j-2}\, y_j \left| I_{j-2} \right| x_j \\
&= x_1 y_1 + (-1)^{2j}\, x_j y_j \\
&= x_1 y_1 + x_j y_j \\
&= 1
\end{aligned}
$$

maka $\det(S) = \det(B)\det\left(I_{t-j}\right) = 1$ atau S adalah matriks invertibel.

Jadi, matriks $AS \sim A$ atas *R*, dengan

$$
AS = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1t} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sj} & \cdots & a_{st} \end{bmatrix}
\left[\begin{array}{c|c|c|c} x_1 & 0 & -y_j & 0 \\ \hline 0 & I_{j-2} & 0 & 0 \\ \hline x_j & 0 & y_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{t-j} \end{array}\right]
$$

$$
= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{1j}x_j & a_{12} & \cdots & -a_{11}y_1 + a_{1j}y_1 & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1t} \\ a_{21}x_1 + a_{2j}x_j & a_{22} & \cdots & -a_{21}y_1 + a_{2j}y_1 & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1}x_1 + a_{sj}x_j & a_{s2} & \cdots & -a_{s1}y_1 + a_{sj}y_1 & a_{s(j+1)} & \cdots & a_{st} \end{bmatrix}
$$

Misalkan $AS = B = \left[b_{kl}\right]$ maka

$$
\begin{aligned}
b_{11} &= a_{11}x_1 + a_{1j}x_j \\
&= d
\end{aligned}
$$

dan

$$
\begin{aligned}
b_{1j} &= -a_{11}y_j + a_{1j}y_1 \\
&= -\left(dy_1\right) + d\left(y_j\right)y_1 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

dan b_{ij} yang lain adalah kombinasi linier dari $A = \left[a_{kl}\right]$. Proses selesai untuk kolom ke-*j*.

Proses dilanjutkan untuk kolom *j* yang lain yang memenuhi kasus 2 hingga akhirnya diperoleh matriks $A' = \left[a_{kl}\right] \sim A$ atas R dengan

$$
A' = \begin{bmatrix} a'_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{s1} & a'_{s2} & \cdots & a'_{st} \end{bmatrix}
$$

dan $\Phi\left(a'_{11}\right) < \cdots < \Phi\left(d\right) < \Phi\left(a_{11}\right)$.

Jika $a'_{11} \mid a'_{i1},\ 2 \le i \le s$, diperoleh kasus 1. Jika a'_{11} juga membagi semua $a'_{ij},\ (2 \le i \le s,\ 2 \le j \le t)$, maka dengan operasi elementer baris $B_{i1}\left(-q_i\right),\ 2 \le i \le s$ pada A' diperoleh *C*. Jika ada $a'_{ij} \in A',\ (2 \le i \le s,\ 2 \le j \le t)$, hingga $a'_{11} \nmid a'_{ij}$ maka dengan operasi elementer baris $B_{1j}\left(1\right)$ diperoleh kasus 2. Tetapi jika ada $a'_{i1} \in A',\ \left(2 \le i \le s\right)$ sehingga $a'_{11} \nmid a'_{i1}$ maka diperoleh kasus 3.

Kasus 3

Karena $\left(\exists a_{i1} \in A'\right) a'_{11} \nmid a'_{i1}$, maka ada $q \in R$ dengan $q = \text{fpb}\left(a'_{11},\ a'_{i1}\right), q \ne 0$ dan $Ra'_{11} + Ra'_{i1} = Rq$. Sehingga $\left(\exists\, r_1, r_2 \in R\right) a'_{11} = qr_1$ dan $a'_{i1} = qr_i$ dan $\Phi\left(q\right) < \Phi\left(a'_{11}\right)$. Kemudian $\left(\exists\, h_1, h_i \in R\right)\ q = h_1 a'_{11} + h_i a'_{i1}$ sehingga $h_1 r_1 + h_i r_i = 1$.

Proses dilanjutkan seperti pada kasus 2 dengan membentuk matriks *T* yang berukuran $s \times s$ dengan

$$T = \left[\begin{array}{c|c|c|c} h_1 & 0 & h_i & 0 \\ \hline 0 & I_{i-2} & 0 & 0 \\ \hline -r_i & 0 & r_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{s-i} \end{array}\right]$$

dan $\det\left(T\right) = \det\left(B\right)\det\left(I_{s-i}\right)$ dengan $\det\left(I_{s-i}\right) = 1$.

Pada akhirnya diperoleh matriks $A'' = \left[a''_{kl}\right] \sim A$ atas *R*, dengan

$$A'' = \begin{bmatrix} a''_{11} & a''_{12} & \cdots & a''_{1t} \\ 0 & a''_{22} & \cdots & a''_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a''_{s2} & \cdots & a''_{st} \end{bmatrix}$$

dan $\Phi\left(a''_{11}\right) < \cdots < \Phi\left(q\right) = \Phi\left(p_{11}\right) < \cdots < \Phi\left(d\right) < \Phi\left(a_{11}\right)$.

Jika $a''_{11} \mid a''_{1j},\ 2 \le j \le t$, diperoleh kasus 1. Jika a''_{11} membagi semua $a''_{ij},\ 2 \le i \le s,\ 2 \le j \le t$, maka dengan operasi elementer kolom $K_{j1}\left(-r_1^*\right),\ 2 \le j \le t$, pada A'' diperoleh *C*. Jika ada $a''_{ij},\ 2 \le i \le s,\ 2 \le j \le t$, sehingga $a''_{11} \nmid a''_{ij}$ maka dengan operasi elementer baris $B_{1j}\left(1\right)$ diperoleh kasus 2. Proses dilanjutkan kembali.

Tetapi jika proses dilanjutkan dan mengingat

$$0 \le \cdots < \Phi\left(a''_{11}\right) < \cdots < \Phi\left(p_{11}\right) < \cdots < \Phi\left(a_{11}\right)$$

berhingga, maka akhirnya diperoleh matriks $W=\left[w_{kl}\right]\sim A$ atas R dengan $\Phi\left(w_{11}\right)=0$. Jadi w_{11} unit maka $w_{11}\mid w_{ij}\left(1\le i\le s,\,1\le j\le t\right)$. Dengan operasi elementer baris $B_{i1}\left(-g_i^*\right)$ dan kolom $K_{ji}\left(-g_j\right)$ yang memenuhi $w_{i1}=g_i^*w_{11},\ w_{1j}=g_jw_{11}$ dengan $g_i^*,g_j\in R$ untuk $\left(1\le i\le s,\,1\le j\le t\right)$, diperoleh matriks *C*.

Proses II

Setelah diperoleh matriks *C*, proses I dapat dilakukan pada matriks *C** yang berukuran $\left(s-1\right)\times\left(t-1\right)$ tanpa merubah baris 1 dan kolom 1 matriks C.

Jika S_{t-1}^* dan $T_{(s-1)}^*$ matriks invertibel berukuran $\left(t-1\right)\times\left(t-1\right)$ dan $\left(s-1\right)\times\left(s-1\right)$, dengan

$$S_{(t-1)}^*=\left[\begin{array}{c|c|c|c} x_2^* & 0 & -y_j^* & 0 \\ \hline 0 & I_{j-3} & 0 & 0 \\ \hline x_j^* & 0 & y_2^* & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{t-j} \end{array}\right] \text{ dan } T_{(s-1)}^*=\left[\begin{array}{c|c|c|c} h_2^* & 0 & h_i^* & 0 \\ \hline 0 & I_{i-3} & 0 & 0 \\ \hline -r_i^* & 0 & r_2^* & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{s-i} \end{array}\right]$$

maka menurut Sifat 2.15.a., berlaku

$$\left[\begin{array}{c|ccc} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & C^* & \\ 0 & & & \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & S_{(t-1)}^* & \\ 0 & & & \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|ccc} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & C^*S_{(t-1)}^* & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

merupakan kasus 2 yaitu $\left(\exists c_{2j}\in C^*\right)c_{22}\nmid c_{2j},\ \left(3\le j\le t\right)$. Dan

$$\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & T_{(s-1)}^* & \\ 0 & & & \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|ccc} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & C^* & \\ 0 & & & \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|ccc} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & T_{(t-1)}^*C^* & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

merupakan kasus 3 yaitu $\left(\exists c_{i2}\in C^*\right)\ c_{22}\nmid c_{i2},\ \left(3\le i\le s\right)$.

Setelah berhingga langkah proses I pada *C** diperoleh matriks $C'^*\sim C^*$ atas *R*, dengan

$$C'^*=\left[\begin{array}{c|ccc} d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & C^{**} & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

dan d_2 membagi habis setiap elemen *C***.

Jadi telah diperoleh matriks $C'\sim C$ atas *R*, dengan

$$C' = \left[\begin{array}{c|c|cccc} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & C^{**} & \\ 0 & 0 & & & \end{array}\right]$$

dan $d_1 \mid d_2$ serta d_1 membagi habis setiap elemen *C***.

Selanjutnya, proses I dilakukan pada *C*** tanpa mengubah baris 1 dan 2 serta kolom 1 dan 2 matriks *C'*. Akhirnya diperoleh matriks $D^* = \text{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_u)$ dengan $u = \min\{s, t\}$ dan $d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_u$ serta $D^* \sim A$ atas *R*.

PENUTUP

Kesimpulan

1. Suatu matriks *A* yang berukuran $s \times t$ atas DIU akan ekuivalen dengan suatu matriks $\text{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_u)$ dengan $u = \min\{s, t\}$.
2. Elemen-elemen diagonal utama matriks *A* berukuran $s \times t$ atas DIU memenuhi $d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_u$.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. 1991. Aljabar Linier Elementer, Edisi Kelima. Erlangga, Jakarta.

Brown, W.C. 1992. Matrices Over Commutative Rings. Michael Dekker. Inc, New York.

Fraleigh, J. B, 1980. A First Course in Abstract Algebra, Second Edition. Addison-Wesley Publishing Company, Massachusets.

Hartley, B. and Hawkes, T.O. 1974. Ring Modules and Linear Algebra. Spottiswoode, Ballantyne & Co.Ltd. London and Cholchester.